

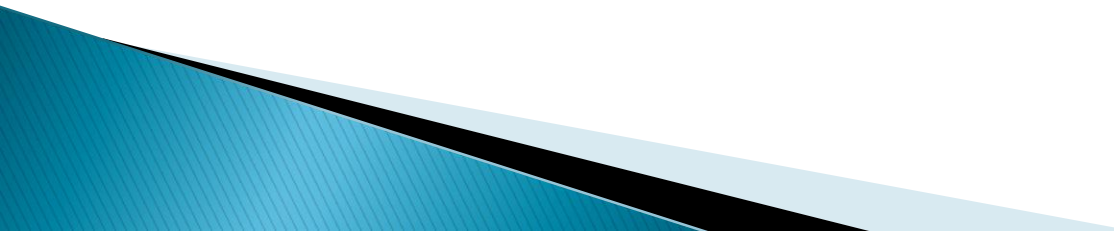
Testy diagnostyczne

Zajęcia 7

Stanisław Cichocki

Natalia Nehrebecka

Plan zajęć

1. Testy diagnostyczne
 2. Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej modelu
 3. Testowanie normalności składników losowych
 4. Testowanie stabilności parametrów
 5. Testowanie heteroskedastyczności
 6. Testowanie autokorelacji
- 

Testy diagnostyczne

- Służą do weryfikacji założeń KMRL
- Jeśli któreś z założeń nie jest spełnione ➡ należy zastanowić się nad przeformułowaniem modelu
- Testy są stosowane po wyestymowaniu modelu

1. Test RESET



Testowanie prawidłowości formy funkcyjnej

- Test RESET (*Regression Specification Error Test*):

$$H_0 : y_i = x_i \beta + \varepsilon_i \quad - \text{liniowa postać modelu}$$

$$H_1 : y_i = f(x_i \beta) + \varepsilon_i \quad - \text{nieliniowa postać modelu}$$

gdzie $f(\bullet)$ jest nieliniowa

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H_0 ?

- ▶ Związek pomiędzy zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi opisany jest równaniem:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3 \cdot n$$

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

Odrzucenie hipotezy zerowej o poprawności przyjętej formy funkcyjnej

- podważa interpretację ekonomiczną modelu (interpretacja oszacowanych parametrów)
- niemożliwe udowodnienie własności estymatora MNK (nieobciążoność czy efektywność estymatora MNK)

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

Przebudowanie modelu aby uwzględnił nieliniowość relacji między zmiennymi (możliwe, że zmienne modelu powinny być poddane jakiejś transformacji – logarytmowanie, potęgowanie, itp.)

pominięte zmienne
objaśniające

Przykład

- ▶ Zmienna zależna: logarytm płac,
- ▶ Zmienne niezależne to: wiek, wiek podniesiony do kwadratu, płeć, wykształcenie (średnie, wyższe; za poziom bazowy przyjmujemy wykształcenie podstawowe), miejsce zamieszkania (małe miasto, średnie miasto, duże miasto; za poziom referencyjny przyjmujemy wieś) oraz stan cywilny – zmienna ta przyjmuje wartość 1, jeśli kawaler lub panna oraz 0 w pozostałych przypadkach

Model 1: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 1089 obserwacji 1-1089
Zmienna zależna: stopaplac

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	5,33901	0,221427	24,112	<0,00001 ***
wiek	0,0342608	0,0109532	3,128	0,00181 ***
wiek_2	-0,000430220	0,000136223	-3,158	0,00163 ***
plec	0,353767	0,0312690	11,314	<0,00001 ***
srednie	0,155550	0,0515332	3,018	0,00260 ***
wyzsze	0,536299	0,0672018	7,980	<0,00001 ***
malemiasto	0,139879	0,0701687	1,993	0,04646 **
sredniemiasto	0,245461	0,0384690	6,381	<0,00001 ***
duzemiasto	0,345939	0,0473768	7,302	<0,00001 ***
stan cywilny	-0,145300	0,0472006	-3,078	0,00213 ***

Przykład

Następnie szacujemy równanie regresji rozszerzonej
(zmiennie y_2 i y_3 to odpowiednio wartości wyliczone podniesione do 2 i 3 potęgi):

Model 2: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 1089 obserwacji 1-1089
Zmienna zależna: stopaplać

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	34,9684	129,450	0,270	0,78711
wiek	0,271120	1,39976	0,194	0,84646
wiek_2	-0,00339804	0,0175760	-0,193	0,84673
plec	2,73339	14,4675	0,189	0,85018
srednie	1,23758	6,36067	0,195	0,84577
wyzsze	4,06587	21,9223	0,185	0,85290
malemiasto	1,10371	5,71848	0,193	0,84699
sredniemiasto	1,92533	10,0379	0,192	0,84793
duzemiasto	2,67553	14,1430	0,189	0,84999
stan_cywilny	-1,11569	5,93962	-0,188	0,85104
y_2	-1,63377	6,25986	-0,261	0,79415
y_3	0,114252	0,319072	0,358	0,72036

Statystyka testu: $F = 25,421338$,
z wartością $p = P(F(2,1077) > 25,4213) = 0,000000167$

2. Test Jarque – Berra



Testowanie normalności składników los.

- Test Jarque – Berra (Test JB):

$H_0 : \varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ - składnik los. ma rozkład normalny

$H_1 : \varepsilon \not\sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ - składnik los. nie ma rozkładu normalnego

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H_0 ?

- ▶ Niespełnione dodatkowe założenie o tym, że składnik losowy ma rozkład normalny

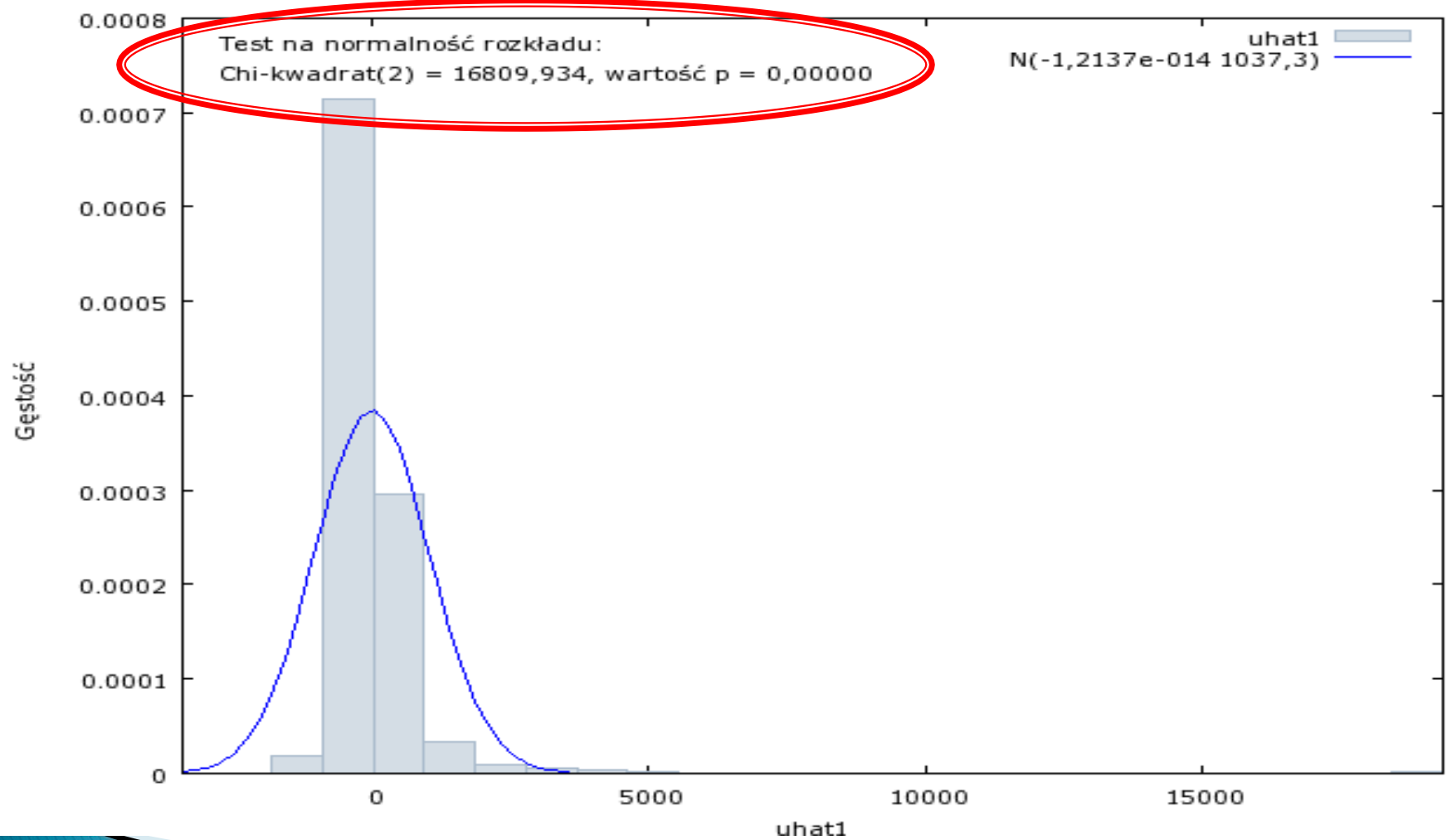
Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

- ▶ **Próba duża:** rozkłady statystyk są bliskie standardowym rozkładom
- ▶ **Mała próba:** jest problemem, gdyż:
 - To założenie jest niezbędne do wyprowadzenie rozkładów statystyk testowych oraz prawidłowego wnioskowania statystycznego.
 - Estymator b uzyskany metoda MNK jest najlepszym estymatorem wśród *liniowych i nieobciążonych* estymatorów → można znaleźć estymator *nieliniowy i nieobciążony* o wariancji mniejszej niż estymator b

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testów?

- ▶ Powiększenie próby, ponieważ dla większej próby rozkłady będą bliższe znanym rozkładom asymptotycznym

Przykład



3. Test Chowa



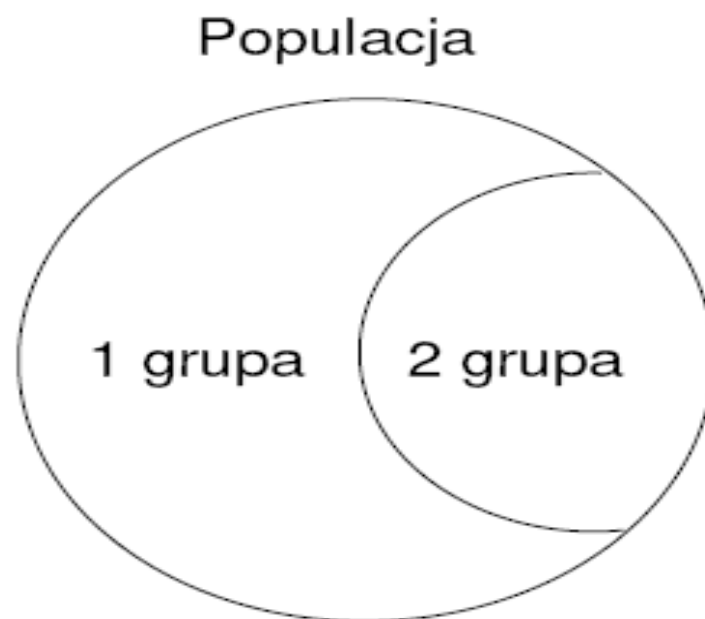
Testowanie stabilności parametrów - Test Chow

- Służy do weryfikacji czy parametry modelu będą takie same dla kilku różnych podpróbek
- Załóżmy, że modele dla podpróbek: $y_s = X_s \beta_s + \varepsilon_s$,
gdzie $s=1,...,m$ oznacza numer próbki

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m$ - parametry są takie same w podpróbkach

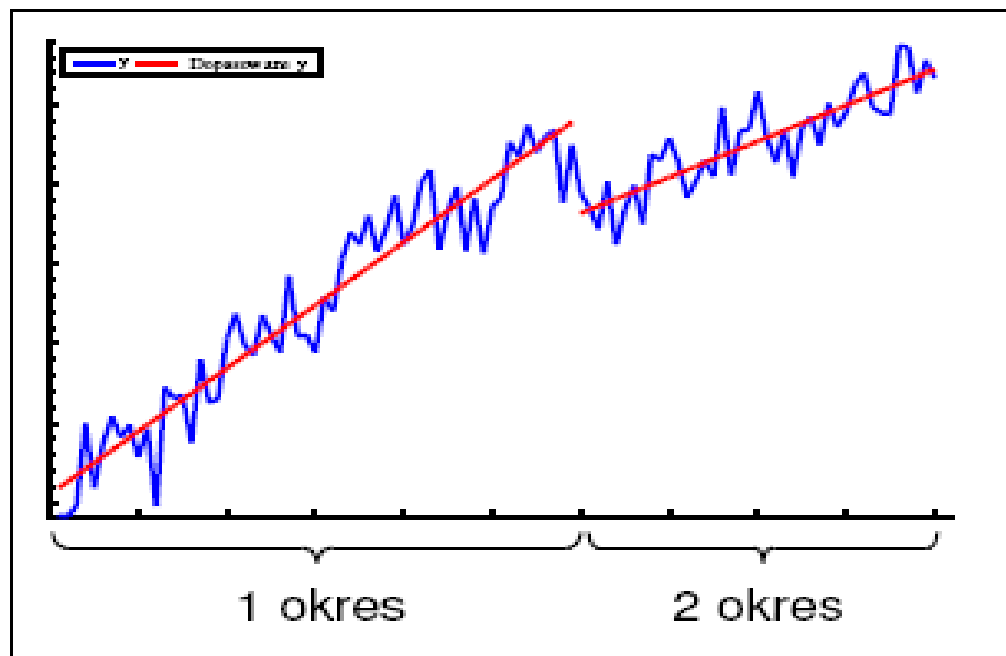
$H_1 : \beta_r \neq \beta_s$ - parametry różnią się w podpróbkach

Dla próby przekrojowej



Rysunek 4: Podgrupy o podobnej wielkości

Dla szeregu czasowego



Rysunek 3: Załamanie w parametrach trendu liniowego

Procedura przeprowadzenia testu Chowa

Sprawdzimy, czy parametry regresji są takie same w próbkach wyodrębnionych za pomocą zmiennej np. płeć

KROK 1: przeprowadzamy regresję na całej próbie (nie wprowadzamy do modelu zmiennej płci!)

- obliczamy: $S = \text{RSS}$ - Suma kwadratów z regresji na całej próbie

KROK 2: przeprowadzamy regresję na próbce kobiet

- obliczamy: $S_1 = \text{RSS}_1$ - Suma kwadratów z regresji na próbce zawierającej kobiety

KROK 3: przeprowadzamy regresję na próbce mężczyzn

- obliczamy: $S_2 = \text{RSS}_2$ - Suma kwadratów z regresji na próbce zawierającej mężczyzn

Testowanie stabilności parametrów – test Chowa

Statystyka opisowa:

$$F = \frac{\left(S - \sum_{j=1}^m S_j \right) / (K(m-1))}{\sum_{j=1}^m S_j / (N - mK)} \sim F(K(m-1), N - mK)$$

Gdzie:

S – suma kwadratów reszt z regresji na całej próbie,

S_j – suma kwadratów reszt z regresji na j -tej podpróbie,

m – liczba wyodrębnionych próbek,

K – liczba szacowanych parametrów (taka sama we wszystkich regresjach),

N – liczba obserwacji.

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H_0 ?

- ▶ Związek pomiędzy zmienną zależną a zmiennymi niezależnymi opisany jest równaniem:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, 3 \cdot n$$

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

Odrzucenie hipotezy zerowej o tym, że parametry są stabilne

- podważa interpretację ekonomiczną modelu (interpretacja oszacowanych parametrów)
- niemożliwe udowodnienie własności estymatora MNK (nieobciążoność czy efektywność estymatora MNK)

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testu?

- ▶ Problem niestabilności parametrów można rozwiązać poprzez estymacje osobnych regresji na wyodrębnionych próbach.

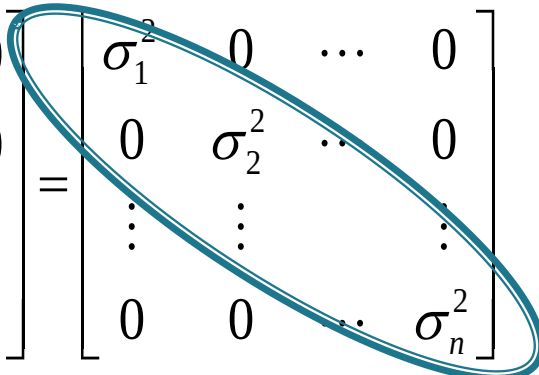
4. Testowanie homoskedastyczności składnika losowego



Testowanie heteroskedastyczności

Przypomnienie: Co to znaczy, że w modelu występuje homoskedastyczność/heteroskedastyczność?

- heteroskedastyczność

$$\text{Var}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ \text{Cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & \text{Var}(\varepsilon_2) & \cdots & \text{Cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \text{Cov}(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \cdots & \text{Var}(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$


Testowanie heteroskedastyczności

- Test Goldfelda-Quandt (Test GQ):

$$H_0 : Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, N$$

$$H_1 : Var(\varepsilon_i) > Var(\varepsilon_j) \quad \text{dla } z_i > z_j \text{ gdzie } z \text{ jest pewną zmienną}$$

- Hipoteza zerowa: homoskedastyczność
- Hipoteza alternatywna: heteroskedastyczność

Testowanie heteroskedastyczności

- Test Goldfelda-Quandta (Test GQ):
- Jako jedyny z testów na heteroskedastyczność ma rozkład wyprowadzony **dla małych prób**

Testowanie heteroskedastyczności

- Test Breuscha-Pagana (Test BP):

$$H_0 : Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, N$$

$$H_1 : Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 f(\alpha_0 + z_i \alpha)$$

gdzie $f(\bullet)$ - funkcja różniczkowalna

z_i - wektor zmiennych, może zawierać zmienne występujące w wektorze zmiennych objaśniających

Testowanie heteroskedastyczności

- Test Breuscha-Pagana (Test BP):
- Hipoteza zerowa: homoskedastyczność
- Hipoteza alternatywna: heteroskedastyczność
- Szczególną postacią testu BP jest test White'a 
 Z_i zawiera wszystkie kwadraty i iloczyny krzyżowe zmiennych objaśniających

Testowanie heteroskedastyczności

- Test BP i White'a są bardziej uniwersalne niż test GQ
jednak rozkłady statystyk testowych dla tych testów są znane
tylko dla dużych prób
- Przy małych próbach stosujemy test GQ, przy dużych próbach
test BP i White'a

Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H_0 ?

- ▶ Homoskedastyczność składnika losowego – wariancja błędu losowego jest stała dla wszystkich obserwacji:

$$\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N$$

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

- ▶ **estymatory MNK b** są nadal
 - nieobciążone i
 - zgodne,
 - ale nieefektywne, co oznacza, że ich błędy standardowe nie są najmniejsze z możliwych.
- ▶ **estymator macierzy wariancji-kowariancji b** jest już
 - obciążony i
 - niezgodny.
 - Macierz wariancji-kowariancji jest wykorzystywana do testowania hipotez na temat istotności zmiennych, więc poprawność wnioskowania statystycznego jest podważona.
- ▶ **estymator s^2** jest
 - obciążony
 - ale zgodny

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testów?

- ▶ Estymator odporny White'a
- ▶ Stosowalna UMNK
- ▶ - powiemy na dalszych zajęciach

4. Testowanie braku autokorelacji w modelu



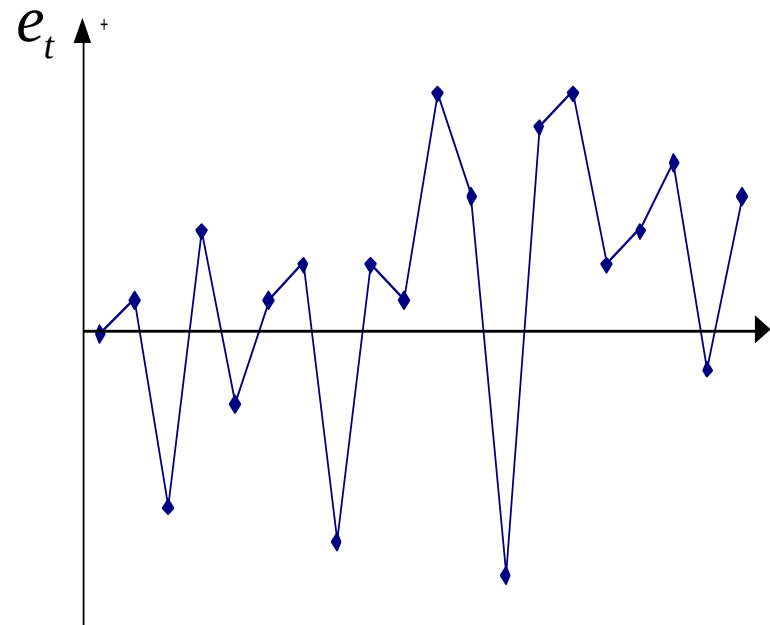
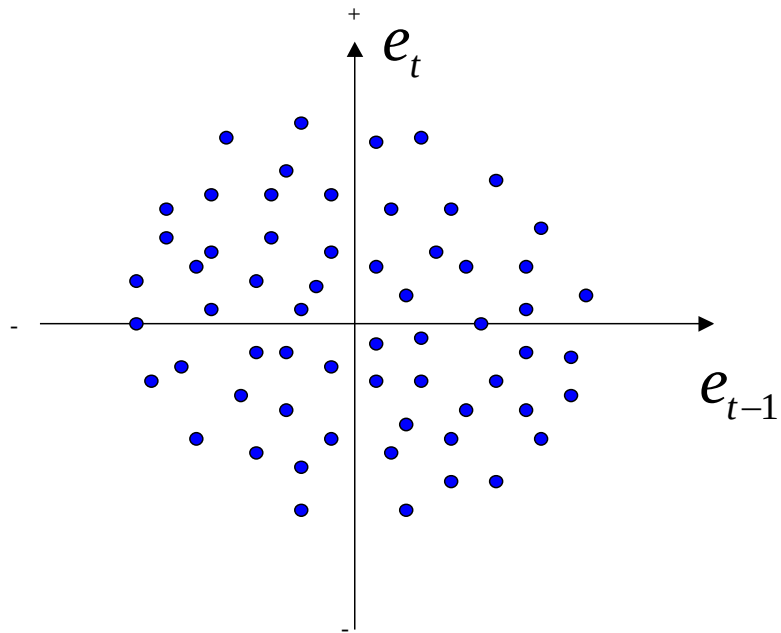
Testowanie autokorelacji

Przypomnienie: Co to znaczy, że w modelu występuje autokorelacja?

- Brak autokorelacji

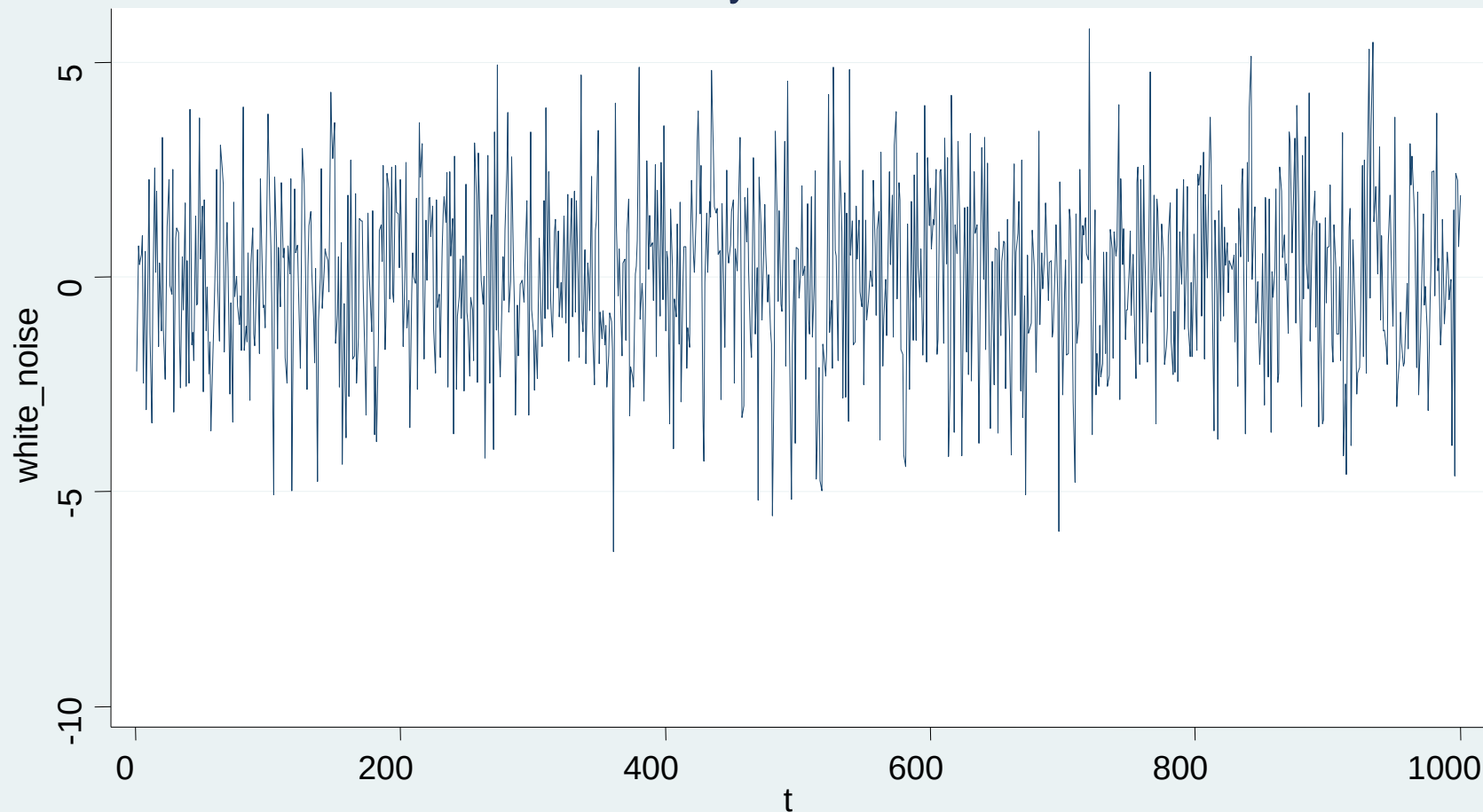
$$Var(\varepsilon) = \begin{bmatrix} Var(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ Cov(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & \cdots & Cov(\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \cdots & Var(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Brak autokorelacji

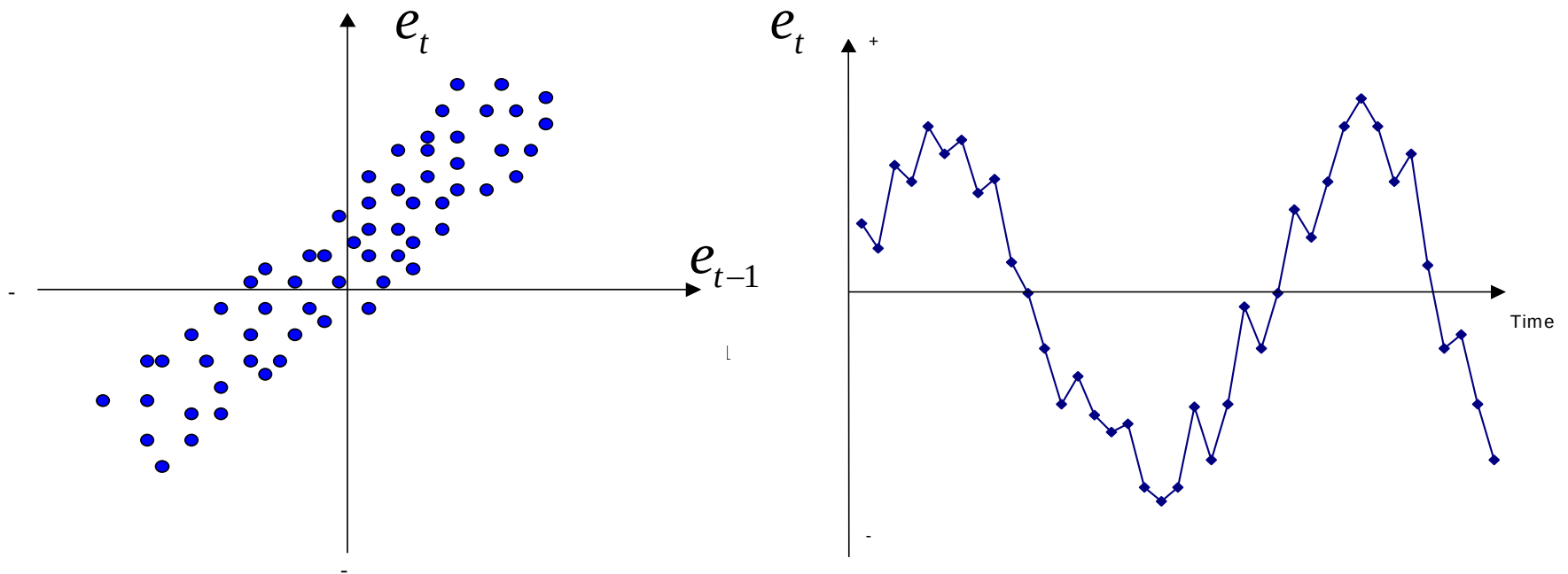


Sferyczne błędy losowe

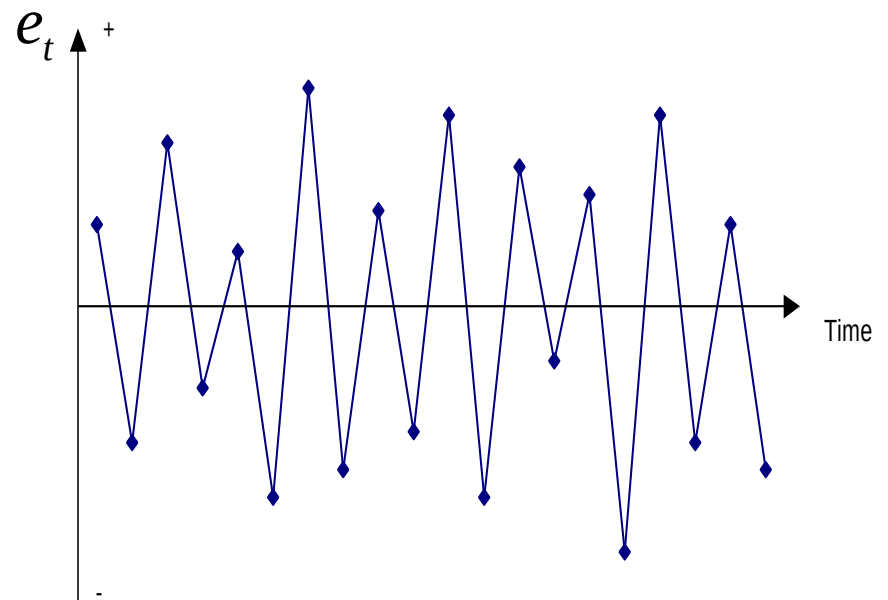
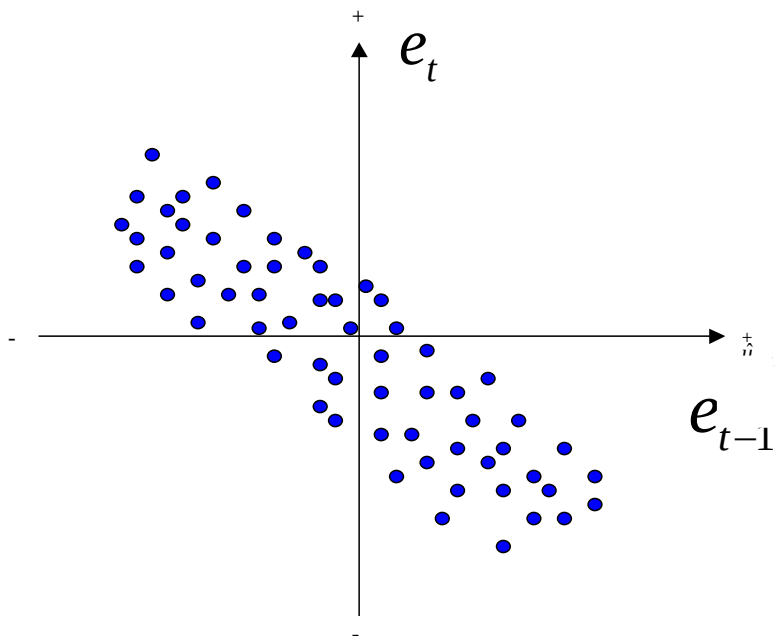
Biały szum



Dodatnia autokorelacja

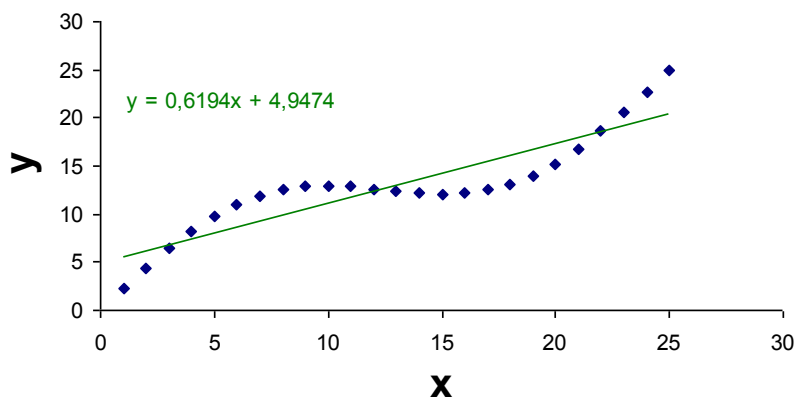


Ujemna autokorelacija

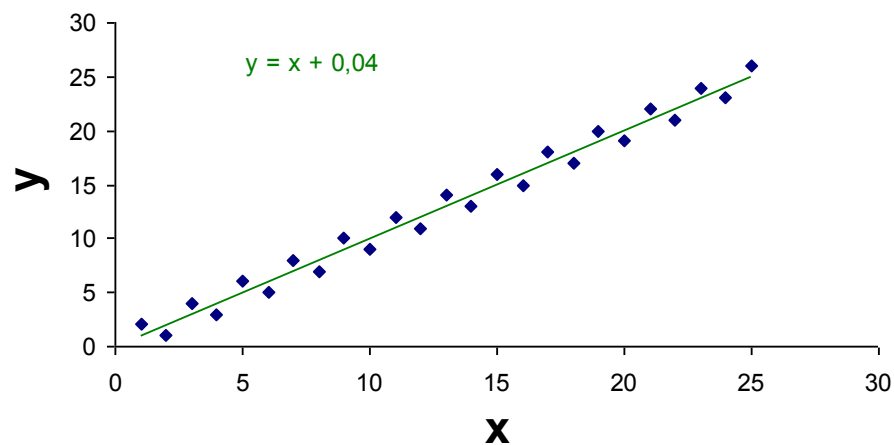


Autokorelacja

► rzędu I dodatnia



■ rzędu I ujemna



Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):

$$H_0 : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 0 \quad - \text{brak autokorelacji}$$

$$H_1 : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) \neq 0 \quad - \text{autokorelacja}$$

gdzie $t = 1, \dots, T$

Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):
- specjalne tablice z wartościami krytycznymi: d_l , d_u

1. Statystyka $DW < 2$

- a) $DW < d_l$ - odrzucamy hipotezę zerową o braku autokorelacji i przyjmujemy hipotezę o dodatniej autokorelacji
- b) $d_l < DW < d_u$ - brak konkluzji
- c) $DW > d_u$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji

Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):

2. Statystyka DW > 2

- a) $DW > 4 - d_l$ - odrzucamy hipotezę zerową o braku autokorelacji i przyjmujemy hipotezę o ujemnej autokorelacji
- b) $4 - d_u < DW < 4 - d_l$ - brak konkluzji
- c) $DW < 4 - d_u$ - nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku autokorelacji

Testowanie autokorelacji

- Test Durbina-Watsona (Test DW):
- Do badania autokorelacji I rzędu (między ε_t , ε_{t-1})
- Rozkład statystyki testowej wyprowadzony dla małych prób
- Nie można go stosować w modelach gdzie jedną ze zmiennych objaśniających jest opóźniona zmienna zależna

Przykład

gretl: model 2

Plik Edycja Testy Zapisz Wykresy Analiza LaTeX

Model 2: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 60 obserwacji 1976:1-1990:4
Zmienna zależna: nocars

	współczynnik	błąd standardowy	t-Student	wartość p	
const	8552,44	3494,61	2,447	0,0177	**
pop	-60,4498	23,4674	-2,576	0,0128	**
Y	757,040	136,762	5,535	9,82E-07	***
price	-5,50342	9,43847	-0,5831	0,5623	
dq2	247,554	74,3300	3,330	0,0016	***
dq3	26,1601	74,9925	0,3488	0,7286	
dq4	-39,8940	74,4281	-0,5360	0,5942	

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1894,16
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 311,346
Suma kwadratów reszt = 2,1825e+006
Błąd standardowy reszt = 202,927
Wsp. determinacji R-kwadrat = 0,61839
Skorygowany wsp. R-kwadrat = 0,57519
Statystyka F (6, 53) = 14,3144 (wartość p < 0,00001)
Statystyka testu Durбина-Watsona = 1,16128
Autokorelacja reszt rzędu pierwszego = 0,418676

Testowanie autokorelacji

- **Test Breuscha-Godfrey (Test BG):**
- **Do badania autokorelacji wyższego rzędu**
- **Można go stosować w modelach gdzie występują opóźnione zmienne zależne**

Testowanie autokorelacji

- Test Breuscha-Godfrey (Test BG):

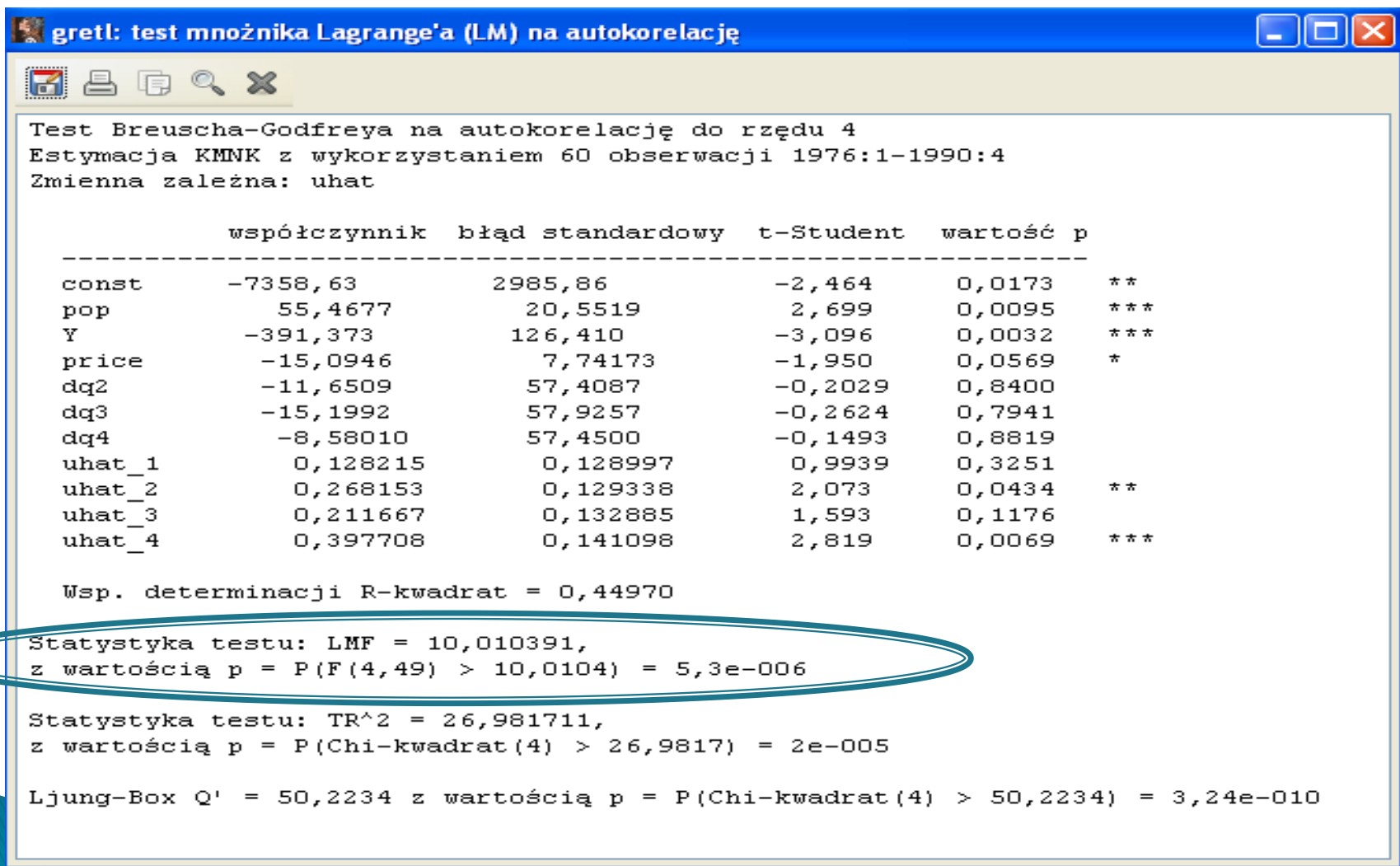
$$H_0 : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-i}) = 0 \quad \text{gdzie } i = 1, \dots, s$$

$$H_1 : \varepsilon_t = \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \gamma_s \varepsilon_{t-s} + u_t \quad \text{gdzie } Var(u) = \sigma_u^2 I$$

- Hipoteza zerowa: brak autokorelacji

- Hipoteza alternatywna: autokorelacja

Przykład



Jakie założenie KMRL nie jest spełnione przy odrzuceniu H_0 ?

- ▶ Brak autokorelacji błędu losowego – kowariancja dwóch różnych błędów losowych jest zerowa:

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \text{dla } i \neq j$$

Jakie są skutki niespełnienia założenia KMRL

- ▶ **estymatory MNK b** są nadal
 - nieobciążone i
 - zgodne,
 - ale nieefektywne, co oznacza, że ich błędy standardowe nie są najmniejsze z możliwych.
- ▶ **estymator macierzy wariancji-kowariancji b** jest już
 - obciążony i
 - niezgodny.
 - Macierz wariancji-kowariancji jest wykorzystywana do testowania hipotez na temat istotności zmiennych, więc poprawność wnioskowania statystycznego jest podważona.
- ▶ **estymator s^2** jest
 - obciążony
 - ale zgodny

W jaki sposób można rozwiązać problemy zasygnalizowane przez wynik testów?

- ▶ Estymator odporny Newey'a-Westa
- ▶ Stosowalna UMNK
- ▶ - **powiemy na dalszych zajęciach**

Pytania teoretyczne

1. Za pomocą jakiego testu weryfikujemy normalność składnika losowego? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tym teście?
2. Za pomocą jakiego testu weryfikujemy prawidłowość formy funkcyjnej? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tym teście?
3. Za pomocą jakiego testu weryfikujemy stabilność parametrów? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tych testach?
4. Za pomocą jakich testów testuje się autokorelację? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tych testach?
5. Za pomocą jakich testów testuje się heteroskedastyczność? Jaka jest hipoteza zerowa i alternatywna w tych testach?

Dziękuję za uwagę