

Czy należy uczyć matematyki studentów ekonomii?

Abstrakt

W referacie udziela się oczywiście twierdzącej odpowiedzi na tytułowe pytanie, ale jednocześnie zgłasza się szereg wątpliwości odnośnie konwencjonalnego podejścia do nauczania matematyki. Na podstawie doświadczenia autora w zakresie nauczania mikroekonomii, ekonomii środowiska i przedmiotów matematycznych (takich jak programowanie wypukłe i równania różniczkowe) omawia się dwa problemy. Po pierwsze, celowość nauczania studentów nie tylko metod i technik, ale również dowodów twierdzeń. Po drugie, lista pojęć i twierdzeń matematycznych, które wydają się najbardziej przydatne w analizach ekonomicznych.

Można zauważyć, że tylko nieliczni studenci ekonomii doceniają wartość ścisłego rozumowania. Większość stara się szybko przyswoić zasadnicze pojęcia, dostrzec ich praktyczne znaczenie i nauczyć się wzorów lub procedur, za pomocą których dałoby się uzyskać jakieś rezultaty liczbowe. Większość uważa, że dowody należy zostawić matematykom. W rezultacie osiągnęte konkluzje bywają płytkie i opierają się raczej na stwierdzeniach poprawnych politycznie, aniżeli na faktach. Dlatego nauczanie matematyki stanowi coś więcej, niż dostarczanie rutynowych rozwiązań. Jeśli byłoby dobrze wdrożone, mogłoby nie tylko rozszerzyć analityczne umiejętności studentów, ale również zwiększyć poziom zdrowego sceptycyzmu i rozwinąć innowacyjność.

Matematycy i ekonomiści mają odmienne poglądy na to, które twierdzenia są potrzebne studentom pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Jest oczywiste, że teoria miary i pojęcia probabilistyczne są stosowane w nowoczesnej ekonometrii. Jednak w odniesieniu do analizy ekonomicznej wybór staje się trudny. Najłatwiej byłoby uznać, że lagranżiany i twierdzenie Kuhna-Tuckera są właściwe dla pierwszego stopnia, zaś hamiltoniany i zasada Pontriagina nadają się na stopień trzeci. Jest to jednak uproszczenie, ponieważ nawet zaawansowane modele mikroekonomiczne bazują często na "zwykłym" twierdzeniu Kuhna-Tuckera, podczas gdy pewne modele przedstawiane w elementarnych podręcznikach – takie jak np. reguła Hotellinga – wymagają zastosowania pojęć sterowania optymalnego. Tak więc zestawienie listy pojęć i twierdzeń matematycznych dla poszczególnych stopni nauczania stanowi nie lada wyzwanie.

W podsumowaniu znajdują się uwagi na temat układu właściwych programów studiów. W sytuacji, kiedy brak jest ogólnoeuropejskich standardów (choć studentów zachęca się do jak największej mobilności), jest wysoce nieprawdopodobne, by licencjat pochodzący z jednej uczelni mógł w pełni wykorzystać ofertę drugiego lub trzeciego stopnia studiów oferowanych gdzie indziej. Tym niemniej starannie identyfikując wiedzę matematyczną potrzebną do tego, by zapisać się na dany kurs i powszechnie o niej informując, uniwersytety powinny ukształtować ogólnoeuropejską świadomość tego, co jest rzeczywiście warte studiowania.

1. Czy matematyka jest użyteczna dla teorii ekonomii?

Przez wiele pokoleń ekonomiści formułowali trudne pytania, ale próbowali na nie odpowiadać odwołując się do zdrowego rozsądku, albo do jakichś filozoficznych założeń. Dopiero w 19. wieku ekonomia zaczęła przypominać fizykę i inne nauki przyrodnicze – zaczęto używać matematyki do tego, by z prostych założeń wyciągać wnioski, które podlegały weryfikacji empirycznej. Szczególnie wiele takich wniosków wyprowadzono przy założeniach optymalizacyjnych, jak np. maksymalizacja użyteczności przez konsumentów lub maksymalizacja zysku przez przedsiębiorstwa. W wieku 20 nastąpiła krytyczna refleksja po tym, jak zorientowano się, że konsumenci mogą podejmować irracjonalne decyzje, a przedsiębiorstwa mogą nie maksymalizować zysków. Od głównego nurtu ekonomii odłączyły się mniejsze strumienie kwestionując jego adekwatność naukową i przydatność dla polityki. Jakkolwiek rzeczywiście pewne ważne problemy ekonomiczne nie są wystarczająco rozumiane, by umożliwić kwantyfikację, nie cała krytyka głównego nurtu jest usprawiedliwiona.

Łatwo pokazać, że zastosowanie rygorystycznej argumentacji w odniesieniu do fałszywego założenia wyjściowego doprowadzi do absurdu. Tym niemniej krytycy ekonomii głównego nurtu idą za daleko całkowicie odrzucając jej ogólne podejście i zamieniając je na podejście deskryptywne. Wracają do stanu, w jakim ekonomia znajdowała się przed 19. wiekiem. Zbyt często poprawne politycznie stwierdzenie zastępuje argumentację logiczną. Zbyt często studenci ekonomii dają się przekonać, iż rzeczywistość jest złożona i nie pozwala na jednoznaczne konkluzje. Oczywiście pewna doza sceptycyzmu jest zdrowa, ale istotą metody naukowej jest przecież upraszczanie rzeczy po to, by osiągnąć uproszczone wyniki. Różnica pomiędzy uproszczeniem a zbytnim uproszczeniem zależy od tego, czemu wynik miał w praktyce służyć. Stwierdzenia uproszczone mogą stanowić podstawę skutecznego działania, natomiast zbytnio uproszczone prowadzą do błędnych działań.

Ramka 1

Swego czasu wykladałem mikroekonomię studentom MBA. Problem dóbr publicznych był szczegółowo dyskutowany. Wszystkie typowe przykłady – takie jak latarnia morska, obrona przeciwlotnicza, ładny widok itp. – zostały wymienione i wyjaśnione. "Warunki pierwszego rzędu" dla optimum były wyprowadzone. Na egzaminie pisemnym zapytałem, czy zapewnienie obrony przeciwlotniczej może być sprywatyzowane. Nieliczni studenci odpowiedzieli poprawnie, że wprawdzie może, ale byłoby to nieefektywne ekonomicznie. Większość dawała odpowiedzi nie na temat, jak np. "powinniśmy zapobiec kolejnej wojnie", albo "działania lotnictwa NATO przeciw Belgradowi stanowiły akt barbarzyństwa". Najwyraźniej studenci uważali, że stwierdzenie uchodzące za poprawne polityczne może służyć jako poprawna odpowiedź.

Studia uniwersyteckie stanowią okazję, by rozwijać umiejętności i cnoty. Oczywiście i jedno, i drugie są ważne. Wzrostowi cnót służy przykład uczciwych nauczycieli, pomaganie ubogim, albo doświadczenie tego jak dobro walczy ze złem w świecie. Jednak świat potrzebuje nie tylko wrażliwych, ale i mądrych. Dlatego jest równie ważne, by młodzi ludzie umieli odróżnić to, co poprawne politycznie od tego, co uzasadnione naukowo. Matematyka jest niezastąpionym narzędziem pozwalającym na dochodzenie do jednoznacznych konkluzji. Jeśli nie podoba się nam jakaś konkluzja, to musimy zakwestionować założenia, przy jakich została osiągnięta. W przeciwnym razie bardzo łatwo narzekać, że sprawy biorą obrót, jakiego

byśmy nie chcieli i poszukiwać winowajców, podczas gdy prawdziwe przyczyny problemu pozostają ukryte.

Matematyka jest metodą, za pomocą której można sporządzać naukowe prognozy, jak również weryfikować dane empiryczne. Np. stosując podręcznikowy model produkcji można przewidzieć, że stosunek krańcowych produktywności czynników pokrywa się ze stosunkiem ich cen. Wymaga to jedynie znajomości elementarnej analizy matematycznej. Potem badacz może porównać tę prognozę z faktycznymi danymi z rynku. Ale tym razem potrzebna jest znajomość testów statystycznych, aby ocenić, czy dane są zgodne z modelem optymalizacyjnym stojącym za całą tą argumentacją. Jeśli testy sugerują, że prognoza jest nietrafna, należy przyrzeć się założeniom początkowym. Być może przedsiębiorstwa nie maksymalizują zysków; albo może zakupują czynniki produkcji po cenach innych niż te, które zarejestrowała statystyka; albo może poddane są ograniczeniom technologicznym, których badacz nie był świadomy? Modele matematyczne strukturyzują nasze myślenie, podsuwają wyjaśnienie obserwowanych zjawisk i tworzą zapotrzebowanie na dane. Studenci, którzy nie doceniają matematyki mają tendencję do akceptowania półprawd i mogą być łatwo wprowadzeni w błąd przez bałamutną argumentację.

Tak więc matematyka jest kluczowa w nauczaniu uniwersyteckim nie tyle jako źródło praktycznej wiedzy, co raczej jako sposób uczulenia młodych ludzi na to, by myśleli krytycznie. Wynika z tego, że to, jak jej uczymy jest nawet ważniejsze od tego, czego uczymy. Tworzenie ram koncepcyjnych, wywołanie nawyku dowodzenia rzeczy uważanych za intuicyjnie oczywiste i ukazanie, że nie wszystko co pozornie oczywiste jest prawdziwe stanowi zapewne najważniejszy rezultat studiowania matematyki.

Istnieje tradycja uczenia studentów niematematycznych, by koncentrować się na metodach i wzorach, a dowody pomijać. Jest to uzasadniane tym, że przecież rola niematematyków polega nie na tym, by rozwijać matematykę, ale na tym, by ją stosować w swoich dyscyplinach, takich jak ekonomia, socjologia czy historia. Podejście to ma jednak poważną wadę. Pomijając dowody studenci przyzwyczajają się do tego, by bezkrytycznie akceptować czyjeś stwierdzenia i czuć się zwolnionym z potrzeby poszukiwania prawdy. W dalszej konsekwencji rodzi się oczekiwanie, że nauka powinna być łatwa, a kiedy już pojawi się jakaś trudność, to trzeba ją pokonać bez zbytniego wysiłku intelektualnego.

Ramka 2

W 1988 r. opublikowałem podręcznik *Równań różniczkowych i różnicowych* oparty na moim jednosemestralnym wykładzie skierowanym do studentów ekonomicznych w latach 1986-1988. Wykład był "samowystarczalny" w tym sensie, że niemal cały materiał – łącznie z twierdzeniem Cauchy'ego-Piccarda i modelem Volterra – był odpowiednio zdefiniowany i dowiedziony. Jedyny wyjątek stanowiło twierdzenie Lapunowa (konieczność warunków stabilności), którego dowód wymagałby zbyt wielu godzin wykładowych bez dania studentom żadnej dodatkowej wiedzy na ten temat. Tym niemniej studenci widzieli, że niemal wszystko znajduje się w zasięgu ich możliwości intelektualnych i nie muszą polegać wyłącznie na autorytecie nauczyciela lub podręcznika. Wymagało się od nich znajomości technik, ale nie była to wiedza czarnoksiężska; wszystko dało się wywieść z matematyki, którą powinni znać z wcześniejszych etapów edukacji.

Po wypowiedzeniu sądu, iż to, czego się uczy ma znaczenie drugorzędne, należy jednak dodać istotne uzupełnienie. Nawet jeśli zasadniczym celem nauczania matematyki jest

ćwiczenie młodych umysłów, nie można nie dostrzegać, że typowy student powinien móc przekonać się, że to, co studiuje, do czegoś służy. A zatem wykłady matematyczne muszą uwzględniać specyficzne potrzeby i tradycję danej dyscypliny. W przeciwnym razie studenci zbuntują się.

2. Jaka matematyka ma być włączona do programów studiów z ekonomii?

19-wieczny przełom w teorii ekonomii nastąpił dzięki zastosowaniu elementarnej analizy matematycznej. Aby studenci mogli zrozumieć logikę mikroekonomii należy wprowadzić twierdzenia o nieograniczonych minimach i maksimach. Stanowi to też dobrą okazję by pokazać przydatność pojęć wypukłości i wklęsłości. Jednak prędzej czy później jakiś nieznośny student zauważy, że w pewnych okolicznościach tak zwane warunki pierwszego rzędu nie są konieczne dla rozwiązania zagadnienia optymalizacyjnego. Właśnie tu 20-wieczna matematyka zaczyna dowodzić swojej przydatności. Twierdzenie Kuhna-Tuckera może być uznane za najważniejszy fragment analizy matematycznej nie zawierający się w typowym programie studiów, a które powinno być nauczane na wydziałach ekonomii. Tak naprawdę może ono zostać wyprowadzone w niecałe dwie godziny z klasycznej metody Lagrange z użyciem twierdzenia o rozdzieleniu, czyli za pomocą dość standardowej techniki algebraicznej. Czyli do zrozumienia podstawowej teorii konsumenta i producenta należy być zaznajomionym ze standardową analizą matematyczną oraz algebrą liniową uzupełnioną o twierdzenie Kuhna-Tuckera.

Przez wiele pokoleń ekonomiści uważali, że położenia równowagowe są jednocześnie optymalnymi (co stanowi dobry przykład tego, że poleganie na zdrowym rozsądku może prowadzić do poważnych błędów). Szok nastąpił w połowie 20-ego wieku wraz z pojawieniem się pojęcia równowagi Nasha. Okazało się, że podmioty gospodarcze mogą tkwić w położeniu, w którym nikt nie ma motywacji, żeby jednostronnie się wycofać, choć żadne optimum nie zostało jeszcze osiągnięte. Teoria gier jest dziedziną matematyki, która pomogła nie tylko reinterpretować niektóre teorie 19-wieczne (np. modele Cournot i Bertrand), ale również formułować całkowicie nowe koncepcje (takie jak np. *self-enforcing agreements* i aukcje poprawne motywacyjnie). Teoria gier stała się zatem kluczową dyscypliną matematyczną 20-ego wieku i warto jej nauczać studentów ekonomii. Poprawnie wykładana będzie łączyć ścisłość z poczuciem użyteczności, a jedno i drugie jest przydatne w kształtowaniu młodych umysłów ekonomicznych.

Coraz więcej jest literatury ekonomicznej opartej na koncepcjach teorii sterowania optymalnego. Trudno byłoby znaleźć czasopismo z głównego nurtu ekonomii niezawierające artykułu odnoszącego się do zasady Pontriagina. Koncepcje teorii sterowania (w tym klasyczny 19-wieczny hamiltonian) nie tylko przenikają do współczesnej mikroekonomii, ale znajdują również zastosowanie w naukach o zarządzaniu. Także w rachunkach narodowych interpretuje się trwały produkt narodowy jako hamiltonian (obecna wartość przyszłych przepływów dobrobytu). Jeśli dany model jest oparty na zmiennych czasu dyskretnego, sterowanie optymalne zastępowane jest programowaniem dynamicznym a całki – szeregami nieskończonymi. W każdym z tych przypadków trzeba się posługiwać dość wyrafinowaną matematyką.

Właściwie przeprowadzone zajęcia z teorii sterowania są zdecydowanie za trudne dla niematematycznych studentów pierwszego stopnia. Zajęcia te wydają się więc odpowiednie dla studentów wyższego, zwłaszcza trzeciego stopnia. Tym niemniej istnieją proste średniozaawansowane modele mikroekonomiczne wymagające zastosowania zasady

Pontriagina. Dobrym przykładem jest Hotellinga model wykorzystania zasobów nieodnawialnych. Tak zwaną regułę Hotellinga ("stopa oczekiwanego wzrostu renty jest równa się stopie dyskontowej") można wyprowadzić niemal bez użycia matematyki, jednak nie da się wyjaśnić ścieżki wydobycia bez wykorzystania twierdzeń teorii sterowania optymalnego. Wykładowcy studentów pierwszego stopnia muszą dokonać wyboru pomiędzy powierzchownym potraktowaniem ważnego zagadnienia a zastosowaniem wyrafinowanej matematyki – w tym wypadku twierdzenia Pontriagina – bez właściwego przygotowania. W końcu nikt nie obiecywał, że nauczanie ekonomii jest łatwym zadaniem!

Przez dwa pokolenia ekonomiści nie udowodnili istnienia równowagi Walrasa. Wystarczył im sam fakt, że model Walrasa ma taką samą liczbę zmiennych co równań. Osoba znająca matematykę nawet na niezaawansowanym poziomie rozumie, że ta równość nic nie znaczy. Jest więc zaskakujące, że w zadawalający sposób zajęto się tym modelem dopiero w połowie 20-ego wieku. Można odnieść wrażenie, że ekonomiści po prostu nie poświęcali wystarczająco dużo uwagi istnieniu ani wyjątkowości obiektów matematycznych, o których się uczyli. Trend ten wydaje się teraz odwracać; współczesna ekonomia jest świadoma kilku twierdzeń o punkcie stałym. Zwłaszcza twierdzenie Brouwera znalazło wiele zastosowań w problemach ekonomicznych, dlatego warto przeprowadzić jego dowód w którymś momencie studiów, chyba najlepiej na studiach drugiego lub trzeciego stopnia. Na studiach pierwszego stopnia wystarczy prosta interpretacja geometryczna na płaszczyźnie (podparta argumentem analitycznym). Nawet uproszczony dowód jest lepszy niż stwierdzenie czy tok rozumowania odnoszące się do zdrowego rozsądku.

Znaczna część współczesnej ekonomii wiele zawdzięcza technikom ekonometrycznym, a w ostatecznym rozrachunku – statystyce matematycznej. Biegłość w statystyce już na wstępie wymaga dobrej znajomości analizy matematycznej; w przeciwnym wypadku nie da się obliczyć rozkładów częstości, funkcji wiarygodności, momentów itp. Wymaga również zrozumienia teorii miary Lebesgue'a i rodzin zbiorów borelowskich, jednak tu pojawia się fundamentalny problem. Dobry wykład z teorii miary musi trwać przynajmniej jeden semestr i byłby uznany przez przeciętnego studenta ekonomii za nazbyt trudny. Sprawa komplikuje się jeszcze bardziej, należy bowiem podkreślić, że całka Lebesgue'a okazuje się lepsza niż całka Riemanna, zwłaszcza w kontekście twierdzeń granicznych, które są szczególnie użyteczne w analizach statystycznych. Wykładowca staje więc przed dylematem: czy trzymać się zasady unikania powierzchownego traktowania materiału, dowodzić wszystkiego co trzeba i tracić kontakt z większością grupy, czy robić przegląd wszystkich koncepcji potrzebnych do analiz i zadowolić się powierzchownym rozumieniem twierdzeń. Nie ma dobrego rozwiązania tego dylematu. Być może najlepiej jest postępować zgodnie z ogólną zasadą przedstawioną w pierwszej części artykułu: przyjąć, że teorię miary zgłębią tylko nieliczni studenci – tacy, którzy chcą wnieść coś nowego do teorii ekonometrycznej. Od pozostałych będzie się jedynie wymagać zrozumienia, że analiza statystyczna, jakiej mają używać, opiera się na teorii zbyt trudnej żeby mogła być włączona do standardowego programu studiów.

Równania różniczkowe (zwłaszcza cząstkowe) stanowią znaczną część matematyki stosowanej. Również w ekonomii nietrudno wymienić liczne zastosowania równań różniczkowych i różnicowych. Istnieją więc powody, żeby stanowiły część programu studiów z ekonomii, i niektórzy studenci wręcz tego wymagają. Pomimo tego, że nauka równań różniczkowych jest niewątpliwie korzystna dla ekonomistów, z uwagi na ograniczenia czasowe nie powinna ona być obowiązkowa dla wszystkich. Tylko zainteresowani modelowaniem matematycznym powinni wybrać takie zajęcia.

Analiza matematyczna i podstawy algebry liniowej stanowią trzon matematyki, której powinno się nauczać ekonomistów. Powinno się jednak dopilnować, że twierdzenie Kuhna-Tuckera będzie się zawierać w tym zestawie, w przeciwnym wypadku bowiem znaczna część mikroekonomii będzie musiała się opierać bardziej na machaniu rękami niż na solidnych podstawach. Wszystkim studentom powinno się dać szansę docenienia podstaw teorii gier, w tym koncepcji równowagi Nasha. Inne zajęcia z matematyki powinny być skierowane tylko do wybranych grup studentów. Równania różniczkowe, teoria sterowania, twierdzenia o punkcie stałym i miara Lebesgue'a znajdują szerokie zastosowanie w badaniach ekonomicznych, jednak nie są niezbędne do uzyskania dyplomu z ekonomii.

3. Jak uczyć matematyki?

Matematyki można uczyć na dwa sposoby: w oddzielnych zajęciach lub w ramach zajęć niematematycznych. Choć każde zagadnienie zasługuje na omówienie w oddzielnych zajęciach, to dla studentów ekonomii być może tylko analiza matematyczna i algebra liniowa powinny być zajęciami obowiązkowymi. Pozostałe zagadnienia mogą być nauczane jako przedmioty do wyboru albo stanowić część zajęć z ekonomii.

Niektóre zagadnienia można z powodzeniem zawrzeć w średniozaawansowanej mikroekonomii. Teoria gier na przykład może zostać wprowadzona jako część wykładu z mikroekonomii. Takie rozszerzenie programu można wprowadzić zarówno na studiach pierwszego, jak i trzeciego stopnia. Na studiach pierwszego stopnia kilka godzin wykładowych wystarczy, by studenci zapoznali się z równowagą Nasha, strategiami mieszanymi i dylematem więźnia. Na poziomie studiów doktoranckich wprowadzenie koncepcji równowagi Nasha trwałej względem podgier, gier powtarzalnych, "twierdzenia ludowego", strategii odwrotu do Nasha itp. wymaga już bardziej gruntownego przedstawienia. Oczywiście każde z tych zagadnień może stanowić odrębne zajęcia, jednak bardziej realistycznym rozwiązaniem jest zaoferowanie ich studentom w formie pakietów.

Teoria sterowania optymalnego jest odrębnym przypadkiem. Na poziomie studiów pierwszego stopnia można się do niej odnieść przy okazji omawiania modelu Hotellinga. Choć w modelu tym używa się hamiltonianów, dowodzenie zasady Pontriagina można uznać za nadmierny wysiłek; pozostawienie twierdzenia bez dowodu od czasu do czasu nie jest ciężkim grzechem. Natomiast na poziomie studiów doktoranckich dobrym rozwiązaniem byłyby odrębne zajęcia poświęcone całej teorii sterowania. Studenci trzeciego stopnia powinni czytać i rozumieć literaturę ekonomiczną szeroko czerpiącą z zasady Pontriagina. Jej zastosowania są tak różnorodne – od mikroekonomii po wybór portfela inwestycyjnego i teorię wzrostu – że zasługuje na odrębne zajęcia.

Ramka 3

Istnieją dwa podejścia w nauczaniu matematyki. Pierwsze polega na jak najdalej posuniętym osłabianiu założeń twierdzeń. Najlepiej, jeśli uda się udowodnić implikacje w drugą stronę, pokazując, że założeń nie da się dalej osłabiać. Alternatywą jest określenie wyniku końcowego, do jakiego powinno się dojść na zakończenie zajęć, i udowodnienie go za pomocą minimalnego wysiłku koncepcyjnego. Jakkolwiek wielu matematyków preferuje pierwsze podejście, dla studentów niematematycznych bardziej odpowiednie wydaje się to drugie. W latach 80-tych wykładałem *Programowanie wypukłe*. Nierówność pomiędzy rozwiązaniami problemu prymalnego i dualnego została zidentyfikowana jako zwieńczenie

wykładu. Cała sekwencja definicji i twierdzeń była więc pomyślana w taki sposób, aby osiągnąć wynik końcowy przy minimalnym wysiłku, używając teorii dualności sprzężonej. Jako zasada nie osłabiano założeń twierdzeń. Były one przyjmowane na poziomie ogólności wystarczającym do osiągnięcia wyniku końcowego. Chcąc zadowolić studentów matematyki słuchających wykładu co jakiś czas wskazywałem, jak wzmocnić dane twierdzenie osłabiając jego założenia, jednak bez podawania dowodu.

Osobną kwestią pozostaje pytanie, kto powinien uczyć matematyki. Istnieją oczywiste argumenty przemawiające zarówno za powierzeniem tego zadania matematykom, jaki i ekonomistom. Kiedy wykład prowadzi matematyk, istnieje większa szansa, że twierdzenia zostaną poprawnie dowiedzione a wykładowca będzie umiał odpowiedzieć na trudne pytania techniczne. Z kolei ekonomiści mogą mieć lepsze wyczucie, do czego potrzebna jest dana koncepcja lub twierdzenie – a taką informację niematematycy bardzo sobie cenią. Istnieje jednak szara strefa pomiędzy czystą teorią a zastosowaniami, w której ani matematycy ani ekonomiści nie mają zapewnionego sukcesu. Jest to sztuka sformułowania zagadnienia z życia codziennego używając języka matematyki. Czasem wymaga to po prostu założenia, że średnia z próby jest zmienną losową ze znanym rozkładem. Czasem trzeba podjąć dodatkowy wysiłek aby wyeliminować nieistotne fakty i wyłowić z problemu tylko tę informację, która da się przenieść w ramy odpowiedniej teorii matematycznej. Wybór teorii i istotnych informacji bynajmniej nie jest łatwym zadaniem.

Nie istnieje gotowy sposób nauczania studentów ekonomii, jak kompetentnie stosować matematykę. Matematycy mogą nie widzieć potrzeby istnienia takiego sposobu, ekonomiści zaś – nie rozumieć wszystkich zawiłości. W ramach niektórych programów studiów organizowane są osobne warsztaty czy laboratoria skierowane na przedstawianie pytań z ekonomii jako problemów matematycznych. Prowadzący powinni mieć doświadczenie w obu dziedzinach.

Postęp w dostępności programów komputerowych drastycznie zmienił rolę zastosowanej matematyki. Jeszcze dwadzieścia lat temu studenci rozwiązywali zadania z programowania liniowego używając metody simpleks z pomocą ręcznego kalkulatora. Dziś tylko od informatyków wymaga się znajomości metody simpleks. Wszyscy pozostali uczą się stosowania modułów programowania liniowego oferowanych przez dziesiątki programów opartych na Windows. Analogicznie, w latach 70-tych studenci ekonometrii musieli ręcznie wykonywać obliczenia w zwykłej metodzie najmniejszych kwadratów (*Ordinary Least Squares*, OLS). Dziś studenci mogą wybierać spośród wielu pakietów, z których każdy ma wbudowany moduł OLS; szacowanie współczynników regresji nie wymaga więcej wysiłku niż wybranie ikony na ekranie komputera. Jedynie matematycy muszą dziś rozumieć, jakie obliczenia są potrzebne do odwracania dużych macierzy. Możliwość rozwiązania analitycznego modelu mikroekonomicznych – np. zaawansowanego modelu duopolu – zależy od umiejętności szybkiego różniczkowania funkcji i rozwiązywania równań. Dostępność programów wykonujących takie obliczenia natychmiast i to bezbłędnie ogromnie przyspieszyła cały proces. W konsekwencji modele, które dawniej były zbyt skomplikowane by je badać, mogą być dziś rozwiązywane przez badaczy obeznanych z komputerem.

Czy komputery zmieniły rolę matematyki w naukach stosowanych? Oczywiście, że tak. Tym niemniej rola matematyki jako narzędzia do rozwinięcia argumentu i wykroczenia poza to, co wydaje się zgodne ze zdrowym rozsądkiem i/lub polityczną poprawnością, nie zmieniła się. Dostępność oprogramowania pomagającego badaczom stosować wzory i

procedury matematyczne nie umniejsza roli matematyki jako treningu umysłowego. Dlatego też wszystkie komentarze z części 1 pozostaną aktualne również w przyszłości.

Podsumowanie i wnioski

Nie ulega wątpliwości, że studenci ekonomii powinni uczyć się matematyki. Matematyka spełnia jednak podwójną rolę. Pierwszym korzyścią uczenia się matematyki jest docenienie siły umysłu. Ekonomisci pozbawieni takiego treningu mogą łatwiej akceptować półprawdy i przeoczać braki w logice swoich argumentów. Ekonomista o silnym zapleczu matematycznym ma większą szansę rozwinięcia spójnego argumentu ekonomicznego nawet przy braku zastosowania jakichkolwiek metod matematycznych. Drugą korzyścią uczenia się matematyki jest poznanie konkretnych technik pomagających zauważać wzajemne powiązania i wyciągać wnioski. Zarówno w przeszłości, jak i teraz matematyka bywa niewłaściwie wykorzystywana przez stosowanie wyrafinowanych technik do kiepsko zidentyfikowanych problemów. Skutkowało to spadkiem uznania dla metod matematycznych i akceptacji opartej się na nich ekonomii głównego nurtu.

Pierwszą korzyść można osiągnąć nauczając matematyki w odpowiednim tempie, nie omijając dowodów i przywiązując właściwą uwagę do spójności całej teorii. Druga wymaga od studentów zrozumienia, jakie problemy mogą rozwiązać przy pomocy danej techniki; wymaga też, by przywiązywać dostateczną uwagę do formułowania pytań z ekonomii używając formalnego języka. Nie każdy ekonomista ani matematyk taką umiejętność musi sobie cenić – potrzebne mogą być osobne zajęcia aby ćwiczyć w niej tylko chętnych studentów.

Współczesna ekonomia opiera się na wielu teoriach matematycznych, z których część przenika tak głęboko, że zasługuje na odrębne zajęcia. Do tej grupy należy analiza matematyczna i podstawy algebry liniowej. Dzięki wielopokoleniowemu doświadczeniu w nauczaniu obu przedmiotów studenci mogą korzystać z dobrych tekstów, ćwiczeń i programów. Jednakże w wielu takich programach ignoruje się twierdzenie Kuhna-Tuckera, którego powinno się uczyć zważywszy na jego dużą przydatność przy licznych zastosowaniach.

Innych teorii matematycznych można uczyć na osobnych zajęciach lub traktując je jako fragmenty zajęć z ekonomii. Ponadto ich istotność może się zmieniać w zależności od profilu i poziomu edukacji – poszczególne programy zajęć mogą się różnić pod względem tych teorii. Nauczanie matematyki jest poważną sprawą i należy ją uważnie przemyśleć by ostatecznie uzyskać szczegółowe rekomendacje.

Thum z ang. Marta Żylicz