

Teoria oczekiwanej użyteczności

Michał Krawczyk

Wydział Nauk Ekonomicznych UW

O czym będzie mowa

- **Stany świata, zdarzenia, loterie, preferencje**
- **Maksymalizacja oczekiwanych wypłat**
- **Maksymalizacja oczekiwanej użyteczności**

Stany świata, zdarzenia

- Stany świata s (w rachunku prawd.: zdarzenia elementarne): np. wygrana Clinton, Trumpa, Stein, Johnsona...
- Zdarzenia E : podzbiory zbioru stanów świata (np. wygrana kobiety, wygrana Trumpa)
- zapis E_1, \dots, E_n będzie oznaczać partycję (dokładnie jedno ze zdarzeń musi zajść)

Loterie

- **Loteria:** funkcja przypisująca każdemu stanowi świata liczbę rzeczywistą („ilość pieniędzy”)
- Np. paddy.com oferuje zakład 2/11 na Clinton. Stawiamy 110\$, co oznacza loterię:
(Clinton: 20, Trump:-110, S:-110, J:-110...)
- Podobnie 110\$ na Trumpa (*odds* 9/2) daje
(Trump: 495, nieTrump:-110)
- Loterie będziemy zapisywać jako x, y, z . α to zdegenerowana loteria (konkretna kwota na pewno)
- Loterie można dodawać: $x+y$ przypisuje $x(s)+y(s)$ każdemu s

Preferencje (na loteriach)

Oznaczenia:

- $x \succcurlyeq y$: x niegorsze od y
- $x \succ y$: x lepsze od y ($x \succcurlyeq y$ i nieprawda, że $y \succcurlyeq x$)
- $x \sim y$: x równie dobre co y ($x \succcurlyeq y$ i $y \succcurlyeq x$)

Założenia (tzw. słaby porządek):

- **Spójność**: dla wszystkich x, y zachodzi $x \succcurlyeq y$ lub $y \succcurlyeq x$ (być może oba)
- **Przechodniość**: dla wszystkich x, y, z jeśli $x \succcurlyeq y$ oraz $y \succcurlyeq z$ to $x \succcurlyeq z$

Dodatkowo: monotoniczność: jeśli $x(s) \geq y(s)$ dla wszystkich stanów świata s , to $x \succcurlyeq y$ (i $x \succ y$ jeśli choć jedna nierówność jest ostra)

Funkcja reprezentująca

- Def: $f. V$ reprezentuje preferencję \succsim jeśli $x \succsim y$ wtedy i tylko wtedy gdy $V(x) \geq V(y)$
- Def.: pewny ekwiwalent, $CE(x)$ to kwota taka, że $CE(x) \sim x$.
- Pewny ekwiwalent reprezentuje preferencję (Dowód korzysta z przechodniości i monotoniczności).
- (czy $2CE+5$ też jest f. repr.?)

Maksymalizacja wartości oczekiwanej (EV)

- Def. Jeśli istnieją takie prawd. zdarzeń w partycji (poprawne, tj. nieujemne i sumujące się do 1) p_1, \dots, p_n , że $EV(x)$ definiowane jako $p_1x_1 + \dots + p_nx_n$, jest równe $CE(x)$, to powiemy, że decydent maksymalizuje wartość oczekiwaną
- (czyli EV jest funkcją reprezentującą preferencje)
- Uwaga: to wciąż może być idiotyczne. Np. przypisywanie $p=1$ temu, że wypadnie 6 na uczciwej kości.

Jak można uzasadniać EV?

- Def: Addytywność: $x \succcurlyeq y \Rightarrow x+z \succcurlyeq y+z$ dla dowolnych x, y, z
- Def: *Dutch Book* (arbitraż) zachodzi gdy suma loterii uważanych za niegorsze jest dla każdego stanu świata gorsza niż suma loterii uważanych za nielepsze, np.

$(A: 50, B: 40) \succcurlyeq (A: 100, B: 0)$

$(A: 40, B: 50) \succcurlyeq (A: 0, B: 100)$ ale

$(A: 90, B: 90)$ to mniej niż $(A: 100, B: 100)$

Czy można zrobić *Dutch book* przeciw paddypower.com?

- (załóżmy, że na 100% wygra Clinton lub Trump)

0~(C: -20, T: 110) [110\$ na Clinton]

0~(C: 110, T: -495) [110\$ na Trumpa]

to nie działa

0~(C: -100, T: 550) [550\$ na Clinton]

0~(C: 110, T: -495) [110\$ na Trumpa]

0 zawsze więcej niż zero!

Czy można zrobić *Dutch book* przeciw paddypower.com?

Drogie, paddypower, postawcie u mnie 550\$ na Clinton i 110\$ na Trumpa. Zawsze będę do przodu.

[niestety nie wolno założyć się na ujemną kwotę...]

Inaczej mówiąc, implikowane prawdopodobieństwa, przy których zakład byłby fair, to $p(C)=11(2+11)$, $p(T)=2(9+2)$. Ich suma u każdego booka będzie większa od 1, co oznacza, że gdy postawimy (stosowną kwotę) na E i nie-E, *na pewno* stracimy pieniądze.

EV a addytywności i *Dutch Book*

Tw. (De Finetti). Załóżmy słaby porządek, monotoniczność i istnienie CE. Wówczas równoważne są

I. Addytywność

II. Brak *Dutch Book* (arbitrażu)

III. Maksymalizacja EV

Uwaga: Koncepcja arbitrażu odgrywa kluczową rolę w finansach. By nie było możliwości arbitrażu, aktywa muszą być wyceniane według EV. Np. ceny aktywów (100 gdy A) i (100 gdy nie-A) muszą sumować się do 100. Zob. też put-call parity.

Zastosowanie w eksperymentach: *proper scoring rules*

- Jak skłonić badanego do podania prawdziwego, subiektywnego prawdopodobieństwa danego zdarzenia?
- Mówimy mu tak: podaj nam to prawdopodobieństwo, r
- Jeżeli zdarzenie zajdzie, otrzymasz $1-(1-r)^2$
- Jeśli nie, otrzymasz $1-r^2$
(czyli jeśli zajdzie co wg Twojej oceny było mało prawdopodobne, zostaniesz ukarany)

Quadratic scoring rule is proper

- Oznaczmy prawdziwe subiektywne pr. zdarzenia przez p . Badany podając pewne r uzyska średnio:

$$E(\pi) = p[1 - (1-r)^2] + (1-p)[1-r^2]$$

- Jakie r maksymalizuje tę oczekiwaną wypłatę?
Pierwsza pochodna:

$$\frac{\partial E(\pi)}{\partial r} = 2p(1-r) - 2(1-p)r$$

- Druga pochodna ujemna, przyrównujemy do zera:

$$2p(1-r) = 2(1-p)r \text{ więc } p=r$$

- *Strictly proper scoring rule*: podanie prawdziwej wartości lepsze niż cokolwiek innego
- Udowodnij, że $\ln(r)$, $\ln(1-r)$ też tak działa

PSR: uwagi

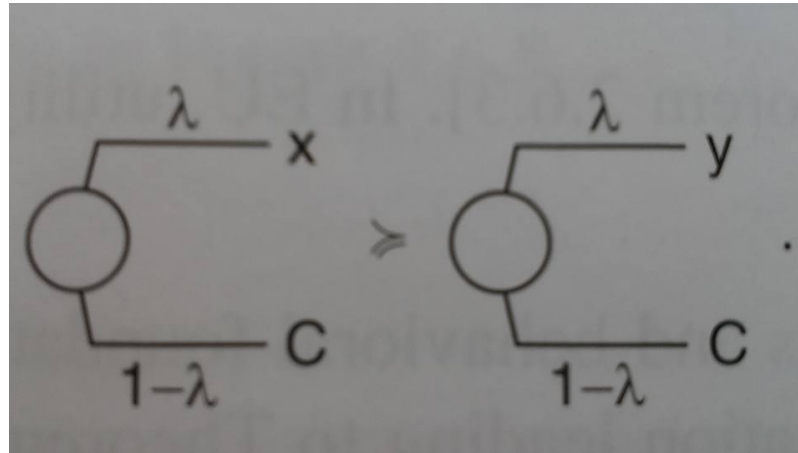
- Analogiczna metoda dla zmiennej dyskretnej o wielu wartościach
- Oraz zmiennych typu ciągłego
- Oczywiście, by wzmocnić zachętę finansową, możemy wszystkie wypłaty przemnożyć przez stałą >1
- (zwykle wypłaty za przewidywania \ll wypłaty za decyzje)
- PSR nie będzie działać gdy nie jest spełniona EV max. (choć są modyfikacje uwzględniające to)

Teoria oczekiwanej użyteczności

- Odtąd zakładamy, że prawdopodobieństwa są znane, ale nie wiemy jak decydent ocenia wyniki
- EUT: istnieje pewna f. $U:R \rightarrow R$, taka, że decydent maksymalizuje
$$EU(x) = p_1 U(x_1) + \dots + p_n U(x_n)$$
- Widać, że szczególny przypadek $U(\alpha) = \alpha$ daje EV.

Aksjomatyzacja EUT

- Def. Aksjomat niezależności. Podstawienie czegoś lepszego poprawia loterię: z $x \succcurlyeq y$ wynika



- Tw. (vN-Morg.) Niezależność, ciągłość (mniej więcej to samo co istnienie CE), przechodniość i spójność łącznie implikują EUT.

Paradoks petersburski

- Ile zapłacił(a)byś za grę, w której z pr. $1/2$ dostajesz 2 zł, z pr. $1/4$ dostajesz 4 zł., z pr $1/8$ dostajesz 8 zł. itd.
- $EV = \infty$, ale dla większości osób CE jest niskie (kilka-kilkanaście złotych)
- Zgodne z EUT jeśli np. $U(x) = \ln(x)$ (wtedy CE wychodzi 4)

Stosunek do ryzyka

Def.: Decydent

wykazuje awersję do ryzyka gdy dla każdej loterii x : $EV(x) \succ x$ (ekwiwalentnie: $EV(x) > CE(x)$)

jest neutralny wg ryzyka gdy dla każdej loterii x : $EV(x) \sim x$ ($EV(x) = CE(x)$)

wykazuje skłonność do ryzyka, gdy dla każdej loterii x , $x \succ EV(x)$ ($CE(x) > EV(x)$)

Wg EUT (ale nie gdy jest pogwałcona!) kształt U określa stosunek do ryzyka

- **Wklęsła f. $U \rightarrow$ awersja do ryzyka**
- **Liniowa f. $U \rightarrow$ neutralność wg ryzyka (EV)**
- **Wypukła f. $U \rightarrow$ skłonność do ryzyka**

F. U może być lokalnie wklęsła, gdzie indziej wypukła. Więc to, że ktoś czasem szuka ryzyka, czasem unika, nie falsyfikuje od razu EUT.

Popularne parametryzacje U

- *Constant Absolute Risk Aversion* (stałe U''/U')
z (ρ – parametr funkcji, α – poziom bogactwa)

$$U(\alpha) = -e^{-\rho\alpha}$$

- *Constant Relative RA* (stałe $\alpha U''/U'$)

$$U(\alpha) = \frac{\alpha^{1-\gamma}}{1-\gamma} \text{ dla } \gamma \neq 1$$

$$U(\alpha) = \ln(\alpha) \text{ dla } \gamma = 1$$

Mierzenie RRA: Holt & Laury (2002)

Option A	Option B	Expected payoff difference	
1/10 of \$2.00, 9/10 of \$1.60	1/10 of \$3.85, 9/10 of \$0.10	\$1.17	W każdym wierszu wybierz A [safe] lub B [risky]
2/10 of \$2.00, 8/10 of \$1.60	2/10 of \$3.85, 8/10 of \$0.10	\$0.83	
3/10 of \$2.00, 7/10 of \$1.60	3/10 of \$3.85, 7/10 of \$0.10	\$0.50	
4/10 of \$2.00, 6/10 of \$1.60	4/10 of \$3.85, 6/10 of \$0.10	\$0.16	
5/10 of \$2.00, 5/10 of \$1.60	5/10 of \$3.85, 5/10 of \$0.10	-\$0.18	
6/10 of \$2.00, 4/10 of \$1.60	6/10 of \$3.85, 4/10 of \$0.10	-\$0.51	
7/10 of \$2.00, 3/10 of \$1.60	7/10 of \$3.85, 3/10 of \$0.10	-\$0.85	
8/10 of \$2.00, 2/10 of \$1.60	8/10 of \$3.85, 2/10 of \$0.10	-\$1.18	
9/10 of \$2.00, 1/10 of \$1.60	9/10 of \$3.85, 1/10 of \$0.10	-\$1.52	
10/10 of \$2.00, 0/10 of \$1.60	10/10 of \$3.85, 0/10 of \$0.10	-\$1.85	

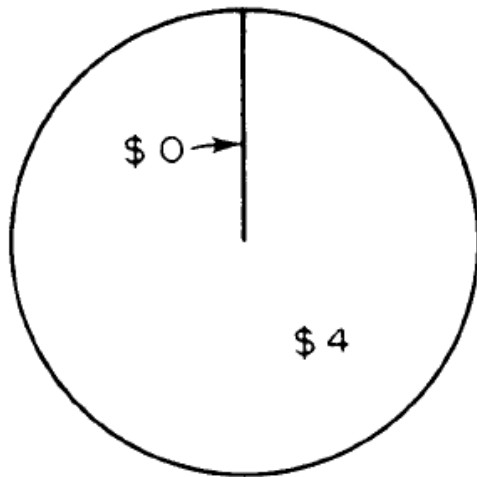
Number of safe choices	Range of relative risk aversion for $U(x) = x^{1-r}/(1-r)$	Risk preference classification	Proportion of choices		
			Low real ^a	20x hypothetical	20x real
0-1	$r < -0.95$	highly risk loving	0.01	0.03	0.01
2	$-0.95 < r < -0.49$	very risk loving	0.01	0.04	0.01
3	$-0.49 < r < -0.15$	risk loving	0.06	0.08	0.04
4	$-0.15 < r < 0.15$	risk neutral	0.26	0.29	0.13
5	$0.15 < r < 0.41$	slightly risk averse	0.26	0.16	0.19
6	$0.41 < r < 0.68$	risk averse	0.23	0.25	0.23
7	$0.68 < r < 0.97$	very risk averse	0.13	0.09	0.22
8	$0.97 < r < 1.37$	highly risk averse	0.03	0.03	0.11
9-10	$1.37 < r$	stay in bed	0.01	0.03	0.06

Liniiowość EUT

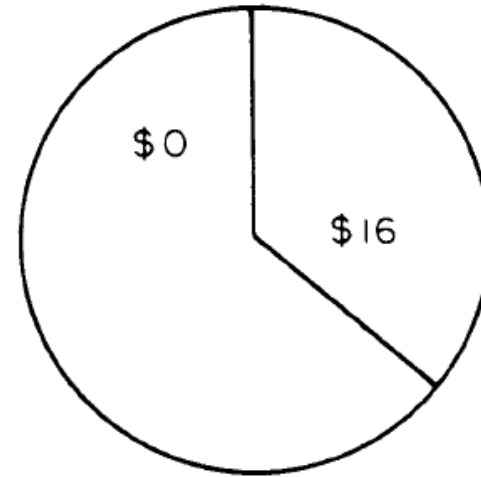
- EU jest liniowa względem prawdopodobieństwa, nie jest liniowa względem wyniku
- Czyli każdy dodatkowy % na większą wypłatę cieszy nas tak samo (por. równoległe krzywe obojętności w trójkącie Machiny), ale każdy kolejny \$ niekoniecznie.
- Zastosowanie w ekonomii eksperymentalnej: nie-neutralność wg ryzyka utrudnia wnioskowanie. Możemy indukować neutralność przez nagradzanie szansami na większą wypłatę (np. 50 zł. raczej niż 10 zł.), nie bezpośrednio gotówką (*binary lottery incentives*)
- Ale nie działa ☹ (Selten et al., T&D 1998)

Obserwacje przeczące EUT: *preference reversals*

P-Bet preferowany w bezpośrednim wyborze,
ale \$-Bet ma wyższe CE



A
P-Bet



B
\$-Bet

(inne: Allais Paradox, Ellsberg Paradox...)