

# Marcin Bielecki, Zaawansowana makroekonomia

## Zadania przygotowujące do egzaminu końcowego

### Wybór międzyokresowy i model nakładających się pokoleń

#### 1. Wybór międzyokresowy: funkcja użyteczności typu CRRA

Konsument rozwiązuje problem maksymalizacji użyteczności z cyklu życia  $U$ , gdzie użyteczność z konsumpcji w danym okresie  $u$  jest zadana funkcją o stałej relatywnej awersji do ryzyka (Constant Relative Risk Aversion), często wykorzystywanej w makroekonomii i finansach:

$$\begin{aligned} \max_{c_t, c_{t+1}, a_{t+1}} \quad & U = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \beta \frac{c_{t+1}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \\ \text{p. w.} \quad & c_t + a_{t+1} = y_t \\ & c_{t+1} = y_{t+1} + (1+r)a_{t+1} \end{aligned}$$

gdzie  $\sigma \geq 0$ ,  $\beta \in [0, 1]$ ,  $y_t, y_{t+1} \geq 0$  oraz  $r \geq -1$ .

- Zapisz międzyokresowe ograniczenie budżetowe i skonstruuj Lagranżjan.
- Wyprowadź warunki pierwszego rzędu względem  $c_t$  i  $c_{t+1}$ . Wyraż  $c_{t+1}$  jako funkcję  $c_t$ .
- Znajdź wyrażenia dla optymalnych  $c_t$  i  $c_{t+1}$ .
- Bezpośrednio na podstawie wyników z (c) zweryfikuj, że dla  $\sigma = 1$  wyrażenia z (c) stają się identyczne do wyrażeń uzyskanych na wykładzie dla logarytmicznej funkcji użyteczności.
- Powróć do wyrażeń z podpunktu (c). Tym razem załóż  $y_{t+1} = 0$ . Jak  $c_t$  reaguje na wzrost realnej stopy procentowej  $r$ ? Co można powiedzieć o relatywnej sile efektów substytucyjnego i dochodowego?

#### 2. Wybór międzyokresowy: ograniczenie pożyczania

Konsument rozwiązuje następujący problem, gdzie dochód w pierwszym okresie równy jest  $1/3$  dochodu w drugim okresie:  $y_{t+1} = y$ ,  $y_t = y/3$ . Dodatkowo dla uproszczenia  $\beta(1+r) = 1$ .

$$\begin{aligned} \max_{c_t, c_{t+1}, a_{t+1}} \quad & U = \ln c_t + \beta \ln c_{t+1} \\ \text{p. w.} \quad & c_t + a_{t+1} = y_t \\ & c_{t+1} = y_{t+1} + (1+r)a_{t+1} \end{aligned}$$

- Za pomocą metody mnożników Lagrange'a znajdź  $c_t$ ,  $c_{t+1}$  i  $a_{t+1}$ . Czy aktywa są dodatnie, czy ujemne?
- Nałożmy teraz ograniczenie pożyczania:  $a_{t+1} \geq 0$ . Jaki jest w tym wypadku optymalny wybór konsumenta?
- Rząd wysyła konsumentowi transfer  $v$ , finansując to obligacjami, które trzeba będzie spłacić w przyszłości i opodatkować wtedy konsumenta. Nowe ograniczenia budżetowe:

$$\begin{aligned} c_t + a_{t+1} &= y_t + v \\ c_{t+1} &= y_{t+1} + (1+r)a_{t+1} - (1+r)v \\ a_{t+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Jaki jest wpływ transferu na decyzje konsumenta?

- Załóż teraz, że  $v$  jest na tyle duże, że pożądane aktywa konsumenta stają się dodatnie. Jaki byłby wpływ kolejnego transferu na decyzje konsumenta?

### 3. Wybór międzyokresowy: dowolny skończony horyzont planowania

Załóżmy, że konsument żyje przez  $T$  okresów, numerowanych od 0 do  $T-1$ . Funkcja użyteczności z całego życia:

$$U = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \ln c_t$$

Konsument planowanie zaczyna z pewnym danym z góry poziomem początkowych aktywów  $a_0$ . Dodatkowo wiadomo wszystkim, że konsument umrze na koniec okresu  $T-1$ , przez co jego aktywa pozostawione na okres  $T$  optymalnie wynoszą 0:  $a_T = 0$ . W każdym z okresów  $t = 0, 1, 2, \dots, T-1$  obowiązuje następujące ograniczenie budżetowe:

$$c_t + a_{t+1} = y_t + (1+r)a_t$$

co implikuje następujące międzyokresowe ograniczenie budżetowe z całego życia:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{c_t}{(1+r)^t} + \frac{a_T}{(1+r)^T} = (1+r)a_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \frac{y_t}{(1+r)^t}$$

- Skonstruuj Lagranżjan. Możesz wykorzystać międzyokresowe ograniczenie budżetowe z całego życia albo zastosować osobny mnożnik  $\lambda_t$  dla ograniczenia budżetowego w każdym z okresów. Wyprowadź warunki pierwszego rzędu konsumenta.
- Znajdź początkowy poziom konsumpcji  $c_0$ .
- Założ dla uproszczenia:  $r = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $a_0 = 0$ , oraz, że dochody konsumenta wynoszą:  $y_t = y$  dla  $t = 0, 1, 2, \dots, R-1$ , a od okresu  $R$  wynoszą 0. Wyznacz poziom konsumpcji w każdym z okresów.
- Wyznacz poziom aktywów konsumenta na koniec ostatniego okresu pracy  $R-1$ ,  $a_R$ .
- Niech konsument spodziewa się żyć dłużej,  $T' > T$ . Jak wpływa to na  $c_0$  i  $a_R$ ?
- Niech konsument później przechodzi na emeryturę,  $R' > R$ . Jak wpływa to na  $c_0$  i poziom aktywów na koniec okresu pracy?

### 4. Model nakładających się pokoleń (OLG): równoważność ricardiańska?

Rozważ gospodarkę, którą zamieszkują jednocześnie osoby młode i stare. Każda osoba otrzymuje pewien stały zasób w danym okresie. Osoby mogą kupować obligacje rządowe, gdy są młode, i realizować ich wykup, gdy są stare. Niech superskrypt „y” oznacza zmienną dla młodych, a superskrypt „o” dla starych. Dla uproszczenia liczba osób młodych i starych jest taka sama (a rozmiar pokolenia znormalizowano do 1). Młode osoby urodzone w czasie  $t$  rozwiązują następujący problem:

$$\begin{aligned} \max_{c_t, c_{t+1}, b_{t+1}} \quad & U_t = \ln c_t^y + \beta \ln c_{t+1}^o \\ \text{p. w.} \quad & c_t^y + b_{t+1} = y^y - \tau_t \\ & c_{t+1}^o = y^o - \tau_{t+1} + (1+r)b_{t+1} \end{aligned}$$

gdzie  $y^y - \tau_t > y^o - \tau_{t+1}$ . Osoby stare w okresie  $t$  (które były młode w okresie  $t-1$ ) konsumują wszystkie zasoby, którymi dysponują:

$$c_t^o = y^o - \tau_t^o + (1+r)b_t$$

Załóżmy, że rząd obniża podatki w okresie  $t$ , finansując to emisją obligacji, a następnie podnosi podatki w okresie  $t+1$ , aby móc wykupić obligacje:  $\Delta\tau_t = -\Delta b$  oraz  $\Delta\tau_{t+1} = (1+r)\Delta b$ .

- Znajdź optymalne poziomy konsumpcji osób, które są młode w okresie  $t$ .
- Jaka byłaby wysokość zagregowanej konsumpcji w okresie  $t$ ,  $C_t = c_t^y + c_t^o$ , gdyby zmiana podatków nie została wprowadzona?
- Co stanie się z zagregowaną konsumpcją w okresie  $t$ , jeżeli podatki zostaną zmienione na początku okresu  $t$ ? Oblicz  $\Delta C_t / \Delta T$ .
- Biorąc pod uwagę wyniki z (b) i (c), czy w tej gospodarce zachodzi równoważność ricardiańska? Dlaczego (nie)?

## 5. Model nakładających się pokoleń (OLG): równowaga ogólna i dynamiczna efektywność

Przeanalizujemy własności równowagi w podstawowym modelu OLG. Dla uproszczenia notacji i obliczeń załóż brak postępu technologicznego:  $g = 0$  i  $A = 1$ , a także  $\delta = 1$ .

- (a) Rozwiąż problem maksymalizacji użyteczności gospodarstwa domowego, zakładając funkcję użyteczności typu CRRA:

$$\begin{aligned} \max \quad & U = \frac{(c_t^y)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{(c_{t+1}^o)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ \text{p. w.} \quad & c_t^y + a_{t+1} = w_t \\ & c_{t+1}^o = (1 + r_{t+1}) a_{t+1} \end{aligned}$$

- (b) Zweryfikuj, że dla  $\sigma = 1$  otrzymane w (a) wyrażenia upraszczają się do uzyskanych na wykładzie. Jak konsumpcja młodych i ich poziom zgromadzonych aktywów przedemerytalnych zależą od oczekiwanej stopy zwrotu z aktywów ( $r_{t+1}$ ) dla różnych  $\sigma$ ?
- (c) Uzyskaj ceny czynników produkcji w równowadze poprzez rozwiązanie problemu maksymalizacji zysku firm:

$$\max_{K,L} \quad \Pi_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - (r_t + \delta) K_t - w_t L_t$$

- (d) Wykaż, że w modelu OLG jest spełniona równowaga na rynku dóbr ( $Y_t = C_t + I_t$ ), jeśli rynki pracy i kapitału są w równowadze.
- (e) Zakładając  $\sigma = 1$ , znajdź poziom kapitału na pracownika w stanie ustalonym  $k^*$ .