

Marcin Bielecki, Zaawansowana Makroekonomia

Zadania przygotowujące do egzaminu końcowego

Model Solowa-Swana

1. Neoklasyczna funkcja produkcji

Neoklasyczna funkcja produkcji $Y = F(K, L, A)$ spełnia następujące własności:

- Stałe przychody skali (względem kapitału i pracy): $F(zK, zL, A) = zY$
- Dodatnie i malejące krańcowe przychody z obu czynników produkcji:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$$

- Warunki Inady:

$$F(0, L, A) = 0, \quad F(K, 0, A) = 0, \quad \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0$$

Zbadaj, czy poniższe funkcje produkcji są neoklasyczne.

- (a) Funkcja Cobba-Douglasa: $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ dla $\alpha \in (0, 1)$
- (b) Funkcja o doskonałej substytucyjności między kapitałem a pracą: $Y = A(K + L)$
- (c) Funkcja Leontiefa: $Y = \min\{AK, BL\}$
- (d) Funkcja Constant Elasticity of Substitution $Y = A[\alpha K^\rho + (1 - \alpha)L^\rho]^{1/\rho}$ dla $\alpha \in (0, 1)$ oraz $\rho \leq 1$. Dla $\rho \rightarrow 0$ funkcja CES zbiega do funkcji Cobba-Douglasa (a), dla $\rho = 1$ K i L stają się doskonałymi substytutami (b), a dla $\rho \rightarrow -\infty$ funkcja zbiega do funkcji Leontiefa (c). Rozpatrz osobno przypadki $\rho \in (0, 1)$ oraz $\rho \in (-\infty, 0)$.

2. Dynamika modelu Solowa-Swana

Przyjmij następujące dane: $Y = \bar{A}K^\alpha L^{1-\alpha}$, $\bar{A} = 1$, $\alpha = 1/2$, $s = 0.3$, $\delta = 0.05$, $n = 0$. Oblicz tempo wzrostu kapitału, PKB i konsumpcji na pracownika przy początkowym poziomie kapitału na pracownika $k_0 = 9$. Znajdź poziom kapitału, PKB i konsumpcji na pracownika w stanie ustalonym.

3. Neoklasyczna funkcja produkcji w postaci intensywnej

Dla dowolnej neoklasycznej funkcji produkcji F wykaż, że jej postać intensywna f spełnia następujące własności:

$$f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \quad \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0, \quad f(k) - k \cdot f'(k) > 0$$

Skorzystaj w tym celu z poniższego twierdzenia Eulera o własności funkcji homogenicznych stopnia m . Funkcje o stałych przychodach skali charakteryzują się $m = 1$.

Definicja Funkcję $f(x, y)$ nazywamy homogeniczną stopnia m , jeśli:

$$f(z \cdot x, z \cdot y) = z^m \cdot f(x, y)$$

Twierdzenie Eulera brzmi (w uproszczeniu): Jeśli funkcja f jest homogeniczna stopnia m , to:

$$m \cdot f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y$$

Dodatkowo, $\partial f / \partial x$ i $\partial f / \partial y$ są homogeniczne stopnia $m - 1$.

4. Funkcja produkcji CES

Robert Solow w swoim artykule “A Contribution to the Theory of Economic Growth” rozważał zachowanie gospodarki dla innych funkcji produkcji, niż Cobb-Douglasa. Jedną z nich była funkcja typu CES:

$$Y_t = \bar{A} [\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha) L_t^\rho]^{1/\rho}$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$, $\rho \leq 1$ i dla uproszczenia tempo postępu technologicznego równe jest 0.

- Zapisz funkcję produkcji w postaci intensywnej na pracownika.
- Znajdź poziom kapitału na pracownika w stanie ustalonym.
- Jak wzrost tempa zmiany populacji wpływa na poziom kapitału na pracownika w stanie ustalonym?
- Jak wzrost stopy oszczędności wpływa na poziom kapitału na pracownika w stanie ustalonym?

5. Konwergencja do stanu ustalonego

Wykaż, że dla dowolnej neoklasycznej funkcji produkcji kapitał na pracownika w stanie ustalonym zależy dodatnio od s i ujemnie od δ oraz n , a tempo wzrostu kapitału na pracownika zależy ujemnie od bieżącego poziomu k . Wykaż też dla dowolnej neoklasycznej funkcji produkcji, że wyższy stosunek K/Y (lub k/y) jednoznacznie przekłada się na wyższy poziom PKB na pracownika (przy stałym poziomie technologii).

5. „Pułapka biedy” w modelu Solowa-Swana

Założmy, że kraj ma dostęp do dwóch funkcji produkcji:

$$Y_1 = K^\alpha L^{1-\alpha} \quad \text{oraz} \quad Y_2 = \bar{A} K^\alpha L^{1-\alpha} - \bar{B} L, \quad \text{gdzie } \bar{B} > 0 \text{ i } \bar{A} > 1$$

Możemy sobie wyobrazić, że komponent liniowy względem pracy w drugiej funkcji produkcji odzwierciedla np. koszty utrzymywania dobrze funkcjonującego państwa.

- Zapisz obie funkcje produkcji w postaci intensywnej na pracownika.
- Wyznacz poziom kapitału na osobę $\bar{k}$, przy którym “opłaca się” przejść na drugą funkcję produkcji.
- Czy możliwe jest, że kraj “utknie” w niższym stanie ustalonym dla pierwszej funkcji produkcji?
- Jak można by pomóc krajowi w sytuacji z (c)?

6. Postęp technologiczny, wynagrodzenia czynników produkcji i konwergencja

W pełnym modelu Solowa-Swana występują dwa czynniki produkcji: kapitał K i praca L , a funkcja produkcji w postaci Cobb-Douglasa dana jest wzorem:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

Zakłada się, że L i A rośnie egzogenicznie w odpowiednio tempie n i g , a ewolucja zasobu kapitału w czasie wynosi:

$$K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta) K_t$$

- Zapisz równanie na tempo wzrostu kapitału na efektywną jednostkę pracy. Znajdź poziom kapitału na efektywną jednostkę pracy oraz dochodu na efektywną jednostkę pracy na ścieżce zrównoważonego wzrostu.
- Model Solowa zakłada, że konsumpcja na pracownika c jest stałą częścią $(1 - s)$ dochodu na pracownika y . Czy wynik z punktu (a) oznacza, że wyższe tempo wzrostu technologicznego obniża poziom konsumpcji na pracownika? Dlaczego?
- Zakładając, że płaca jest równa krańcowemu przychodowi z pracy, wykaż, że zależy ona dodatnio od kapitału na jednostki efektywne pracy. Następnie wykaż, że tempo wzrostu płac (także poza ścieżką zrównoważonego wzrostu) jest równe tempu wzrostu PKB na pracownika.

- (d) Zakładając, że stopa zwrotu z kapitału jest równa krańcowemu przychodowi z kapitału, wykaż, że zależy ona ujemnie od kapitału na jednostki efektywne pracy. Znajdź poziom stopy zwrotu z kapitału na ścieżce zrównoważonego wzrostu.
- (e) Dokonaj liniowej aproksymacji równania na tempo wzrostu kapitału na efektywną jednostkę pracy względem $\ln \hat{k}$ wokół $\ln \hat{k}^*$.¹ Pokaż, że równanie konwergencji dla dochodu na pracownika wyprowadzone z tego modelu ma następującą postać: $g_y \approx g + (1 - \alpha)(\delta + n + g)(\ln y_t^* - \ln y_t)$

7. Formy postępu technologicznego a wynagrodzenia czynników produkcji

Zakładając istnienie reprezentatywnej firmy oraz doskonałą konkurencję na rynku dóbr i czynników produkcji, rozwiąż problem maksymalizacji zysku firmy. Cena produktu firmy jest znormalizowana do 1, a wszystkie inne ceny są wyrażone w kategoriach realnych (jednostek dobra końcowego). Załóż, że funkcja produkcji jest w postaci CES:

$$Y_t = A_{Ft} \cdot [\alpha (A_{Kt} K_t)^\rho + (1 - \alpha) (A_{Lt} L_t)^\rho]^{1/\rho}$$

przy czym dopuszczamy co do zasady trzy „rodzaje” postępu technologicznego.

- (a) Wyprowadź wyrażenia na wynagrodzenia czynników produkcji (przeciętną płacę $w = \partial Y / \partial L$ i stopę zwrotu z kapitału $r_K = \partial Y / \partial K$).
- (b) Wyprowadź wyrażenia na udziały wynagrodzeń czynników produkcji w PKB (pracy: wL/Y oraz kapitału: $r_K K/Y$).
- (c) Rozważ ścieżkę zrównoważonego wzrostu ze stałym stosunkiem K/Y . Wykaż, że dla funkcji typu CES jedynie postęp technologiczny „wyrażony” jako systematyczny wzrost A_{Lt} w czasie skutkuje stałymi udziałami wynagrodzeń czynników produkcji PKB w czasie. Przydatne będzie zdefiniowanie $\tilde{k}_t \equiv (A_{Kt} K_t) / (A_{Lt} L_t)$.
- (d) Wykaż, że w sytuacji z podpunktu (c) stopa zwrotu z kapitału r_K jest stała, a płace w rosną w tempie zmiany A_{Lt} w czasie.

8. Rozszerzenie o kapitał ludzki

Rozpatrz zmodyfikowany model autorstwa Mankiwa, Romera i Weila (1992), w którym występuje kapitał ludzki H , a funkcja produkcji wyrażona jest wzorem (dla uproszczenia notacji przyjmujemy stały poziom technologii $\bar{A} = 1$, $g = 0$):

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\beta L_t^{1-\alpha-\beta}$$

gdzie $\beta \in (0, 1)$ oraz $\alpha + \beta < 1$. Niech s_k oznacza część dochodu inwestowaną w kapitał fizyczny, natomiast s_h jest częścią przeznaczaną na inwestycje w kapitał ludzki. Pozwala nam to na zapisanie warunków opisujących zmiany w czasie kapitału fizycznego na pracownika k oraz kapitału ludzkiego na pracownika h w następujący sposób:

$$\Delta k_{t+1} \simeq s_k y_t - (\delta + n) k_t$$

$$\Delta h_{t+1} \simeq s_h y_t - (\delta + n) h_t$$

- (a) Znajdź poziomy kapitału fizycznego, kapitału ludzkiego i PKB na pracownika w stanie ustalonym.
- (b) Wyprowadź wyrażenie na stopę zwrotu z kapitału fizycznego na pracownika $r_K = \partial y / \partial k$.
- (c) Wyprowadź wyrażenie na wynagrodzenie kapitału ludzkiego na pracownika $w_H = \partial y / \partial h$.
- (d) Wykaż, że r_K zależy dodatnio od h , a w_H zależy dodatnio od k .
- (e) Jak wniosek z (d) pozwala nam zracjonalizować obserwowane przepływy kapitału finansowego i wykształconych pracowników pomiędzy krajami?

¹Liniowa aproksymacja funkcji f wokół danego x^* : $f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x - x^*)$