

Marcin Bielecki, Zaawansowana makroekonomia

Zadania przygotowujące do egzaminu końcowego

Model Ramseya i modele endogenicznego wzrostu

1. Niebezpośrednia własność kapitału przez gospodarstwa domowe

Konsumenci mają dostęp do dwóch instrumentów finansowych: udziałów w firmach (akcji) s oraz emitowanych przez firmy obligacji korporacyjnych b , które cechują się (dla uproszczenia notacji) stałą w czasie realną stopą procentową r . Przyjmijmy konwencję, że akcjami handluje się (bez jakichkolwiek kosztów transakcyjnych) na końcu każdego okresu, już po wypłacie bieżącej dywidendy d . Problem gospodarstw domowych jest następujący (przy czym $a_{t+1} \equiv b_{t+1} + p_t^s s_{t+1}$):

$$\max_{\{c_t, s_{t+1}, b_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

p. w. $c_t + b_{t+1} + p_t^s s_{t+1} = w_t + (d_t + p_t^s) s_t + (1+r) b_t$

- Wyprowadź warunki pierwszego rzędu względem c_t , b_{t+1} i s_{t+1} . Uzyskaj równanie Eulera dla obligacji.
- Połącz warunki pierwszego rzędu względem obligacji i akcji tak, aby uzyskać wyrażenie na cenę akcji.
- Wyprowadź wyrażenie na fundamentalną rynkową wycenę firmy jako funkcję przyszłych oczekiwanych wypłat dywidend (przyjmując stałą liczbę akcji w gospodarce S mamy $V = p^s \cdot S$ oraz $D = d \cdot S$).
- Rozwiąż następujący problem maksymalizacji wartości firmy z perspektywy początku okresu, która (potencjalnie) emituje dług korporacyjny B i jest bezpośrednim właścicielem kapitału, inwestując w niego. D oznacza wypłacaną właścicielom firmy łączną dywidendę. Wyprowadź warunki pierwszego rzędu firmy:

$$\max_{L_t, I_t, B_{t+1}, K_{t+1}} V_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_{t+j}}{(1+r)^j}$$

p. w. $D_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - I_t + B_{t+1} - (1+r) B_t$
 $K_{t+1} = I_t + (1-\delta) K_t$

- Wykaż, że w tej gospodarce prawdziwa jest równość: $K_t = B_t + V_t = Aktywa_t$ dla każdego t . Wykorzystaj wyrażenie na wartość firmy na sam koniec okresu 0 (w momencie dokonywania transakcji giełdowych) i wnioski płynące z warunków pierwszego rzędu firmy:

$$V_1 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - I_t + B_{t+1} - (1+r) B_t\}$$

2. Model Ramseya: rozwiązanie społecznego planisty

Spółeczny planista rozwiązuje problem maksymalizacji użyteczności gospodarstwa domowego pod warunkiem ograniczeń zasobowych:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ \text{p. w.} \quad & c_t + k_{t+1} = A k_t^\alpha + (1-\delta) k_t \quad \text{dla każdego } t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ & k_0 > 0 \end{aligned}$$

- Wyprowadź warunki pierwszego rzędu względem c_t i k_{t+1} oraz równanie Eulera.
- Oblicz wartości k^* i c^* w stanie ustalonym (wykorzystaj zależność $\beta = 1/(1+\rho)$).
- W jaki sposób wartości w (b) zależą od A , δ i ρ ?
- Założ, że $\sigma = 1$ and $\delta = 1$. Zweryfikuj, że w tym przypadku konsumpcja jest stałą częścią dochodu, $c_t = (1-s)y_t$. Znajdź wartość s . *Wskazówka: zacznij od równania Eulera.*
- Znajdź wyrażenie na k_{t+1} jako funkcję k_t i parametrów modelu.

3. Model Ramseya: podatek od przychodów firm

Reprezentatywne gospodarstwo domowe rozwiązuje problem maksymalizacji użyteczności:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ \text{p. w.} \quad & c_t + a_{t+1} = w_t + (1+r_t)a_t + v_t \quad \text{dla każdego } t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ & a_0 > 0 \end{aligned}$$

gdzie v to pogłówny transfer od rządu.

Reprezentatywna firma rozwiązuje w każdym okresie problem maksymalizacji zysku:

$$\begin{aligned} \max \quad & D_t = (1-\tau^y) Y_t - (r_t + \delta) K_t - w_t L_t \\ \text{p. w.} \quad & Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

gdzie τ^y to podatek od przychodów firmy, co jest w modelu równoważne z podatkiem dochodowym o takiej samej stawce niezależnie od źródła dochodu.

- Z problemu gospodarstw domowych wyprowadź równanie Eulera.
- Z problemu firm wyprowadź wyrażenia na ceny jako funkcje kapitału na pracownika k .
- Zapisz ograniczenie budżetowe rządu przy założeniu o zrównoważonym budżecie.
- Wyprowadź warunki na równowagę ogólną gospodarki.
- Znajdź poziomy k i c w stanie ustalonym. Jak one zależą od podatku τ^y ?

4. Model Ramseya: efekty zewnętrzne

Rozważ gospodarkę, której poziom produktywności zależy dodatnio od wydatków publicznych do PKB, co pozwala np. utrzymywać rozbudowaną infrastrukturę czy sprawny system egzekwowania prawa i umów.

Przyjmij notację $\omega \equiv G/Y$. Funkcja produkcji jest następująca:

$$Y_t = A(\omega) K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Rozpatrzmy dwa sposoby sfinansowania wydatków publicznych: podatkiem pogłównym τ lub podatkiem dochodowym τ^y . Problem gospodarstwa domowego jest następujący:

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ \text{p. w.} \quad & c_t + a_{t+1} = w_t + (1+r_t)a_t - \tau_t \quad \text{dla każdego } t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ & a_0 > 0 \end{aligned}$$

Reprezentatywna firma rozwiązuje problem maksymalizacji zysku:

$$\begin{aligned} \max \quad & D_t = (1-\tau^y) Y_t - (r_t + \delta) K_t - w_t L_t \\ \text{p. w.} \quad & Y_t = A(\omega) K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \end{aligned}$$

- (a) Z problemu gospodarstw domowych wyprowadź równanie Eulera.
- (b) Z problemu firm wyprowadź wyrażenia na ceny jako funkcje kapitału na pracownika k .
- (c) Zapisz ograniczenie budżetowe rządu. Zakładając zamkniętą gospodarkę i zrównoważony budżet rządu, wyprowadź warunki na równowagę ogólną gospodarki.
- (d) Rozwiąż problem społecznego planisty (dla uproszczenia zignoruj wybór optymalnego ω).

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad & U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ \text{p. w.} \quad & c_t + k_{t+1} = (1-\omega) A(\omega) k_t^\alpha + (1-\delta) k_t \quad \text{dla każdego } t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ & k_0 > 0 \end{aligned}$$

- (e) Dla jakich wartości τ i τ^y rozwiązanie zdecentralizowane (prywatne) jest tożsame ze społecznie optymalnym?

5. Innowacje horyzontalne: podatki i subsydia

W modelu innowacji horyzontalnych producent dóbr końcowych rozwiązuje następujący problem:

$$\max_{L, x_{it}} L^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{M_t} x_{it}^\alpha - w_t L - \sum_{i=1}^{M_t} p_{it} x_{it}$$

gdzie L to stały w czasie poziom siły roboczej, M_t to liczba już wymyślonych typów dóbr pośrednich, x_{it} oznacza wykorzystanie i -tego dobra pośredniego w produkcji dóbr końcowych, a p_{it} jego cenę. Każde dobro pośrednie produkowane jest przez jednego monopolistę, który maksymalizuje swój zysk (gdzie τ to stawka podatku):

$$\max_{p_{it}, x_{it}} D_{it} = (1 - \tau) (p_{it} x_{it} - x_{it}) \quad \text{pod warunkiem popytu na dobro } x_{it}$$

- Rozwiąż problem maksymalizacji zysku producenta dóbr końcowych i wyprowadź (odwrotną) krzywą popytu na dobra pośrednie.
- Rozwiąż problem maksymalizacji zysku i -tego producenta dóbr pośrednich (monopolisty). Znajdź optymalną cenę, produkowaną liczbę jednostek i maksymalny zysk po opodatkowaniu.
- Koszt wynalezienia nowego typu dobra pośredniego wynosi $(1 - s) / \eta$, gdzie s to subsydlum B+R. Zrównaj ten koszt z wartością nowej firmy, równej zdyskontowanej sumie zysków monopolisty.
- Przekształć wyrażenie z (c) aby uzyskać wyrażenie na poziom realnej stopy procentowej. Wykorzystaj równanie Eulera $g = (r - \rho) / \sigma$ i znajdź stopę wzrostu gospodarczego.
- Określ zależność stopy wzrostu gospodarczego od stawki podatku τ i subsydium s .

6. Innowacje wertykalne: poprzednie wersje produktów, udoskonalanie własnego produktu

Na wykładzie zakładaliśmy, że w danej gałęzi przemysłu zawsze produkowane jest wariant dobra pośredniego o najwyższej wynalezionej jakości. Załóżmy teraz, że najnowsza wersja dobra pośredniego jest produkowana przez jednego monopolistę, a poprzednio wynalezione wersje mogą być produkowane doskonale konkurencyjnie. Dla uproszczenia notacji rozpatrzmy sytuację tylko w jednej gałęzi gospodarki. Producent dóbr końcowych może skorzystać w pełni substytucyjnie z dwóch wersji dobra pośredniego, oznaczonych x_1 i x_2 , gdzie $A_1 = (1 + q) A_2 > A_2$:

$$Y_t = L^{1-\alpha} (A_1^{1-\alpha} x_1^\alpha + A_2^{1-\alpha} x_2^\alpha)$$

- Producent dóbr końcowych wybierze wersję x_1 lub x_2 . Jeśli $p_2 = 1$ (doskonała konkurencja), to czy przy cenie $p_1 = 1/\alpha$ producent dóbr końcowych będzie skłonny wybrać x_1 ?
- Zakładając, że warunek uzyskany w (a) nie jest spełniony (rozmiar „kroku” innowacyjnego jest za mały), znajdź cenę, która sprawi, że i tak na rynku pozostanie wyłącznie monopolista. Jak wpływa to na tempo wzrostu gospodarczego?
- Tym razem załóż, że warunek w (a) jest spełniony. Interesuje nas teraz sytuacja, w której innowacji dokonuje sam monopolista, a nie zewnętrzni konkurenci. W tym celu należy założyć, że obecny producent dobra pośredniego ma przewagę innowacyjną nad pozostałymi podmiotami w obrębie swojej gałęzi przemysłu, $\eta^M > \eta$: $z^M(R_{it}) = \eta^M R_{it} / A'_{i,t+1}$. Uwzględnij, że monopolista dokonując innowacji „zabiera” sobie samemu opłacalność produkcji poprzedniej wersji produktu. Znajdź wyrażenie na zmianę wartości monopolistycznej firmy na skutek opracowania lepszej wersji własnego produktu, zakładając stałe z w czasie i każdej z gałęzi przemysłu.

7. Międzynarodowy transfer technologii, wersja uproszczona

Rozważ świat składający się z dwóch regionów: 1 i 2. W obu regionach produkcja i akumulacja kapitału jest zadana następująco ($i = \{1, 2\}$):

$$Y_i = K_i^\alpha [A_i (u_i L_i)]^{1-\alpha}$$
$$\Delta K_i = s_i Y_i$$

gdzie u oznacza odsetek pracowników zatrudnionych w sektorze produkcyjnym – pozostali $(1 - u)$ pracują w sektorze badań i rozwoju. Całkowita liczba pracowników w obu regionach jest stała w czasie.

Nowe technologie powstają wyłącznie w regionie 1:

$$\Delta A_1 = B_1 (1 - u_1) L_1 A_1$$

Z kolei w regionie 2 poziom technologii może wzrosnąć jedynie na skutek kopiowania / implementacji / uczenia się na technologii w regionie 1:

$$\Delta A_2 = \begin{cases} B_2 (1 - u_2) L_1 (A_1 - A_2) & \text{jeżeli } A_1 > A_2 \\ 0 & \text{jeżeli } A_1 \leq A_2 \end{cases}$$

- (a) Ile wynoszą templa wzrostu obu regionów na ich ścieżkach zrównoważonego rozwoju?
- (b) Ile wyniesie w długim okresie odległość regionu 2 od granicy technologicznej ($a^* \equiv A_2/A_1$)?
- (c) Zakładając, że stopy inwestycji i udziały pracowników w poszczególnych sektorach są takie same w obu regionach, ile wyniesie stosunek PKB na pracownika w regionie 2 w porównaniu do regionu 1 na ścieżce zrównoważonego wzrostu?