



UNIwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Zaawansowana Makroekonomia

Wzrost gospodarczy: Wykład 3

Marcin Bielecki

Rok akademicki 2025/2026

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Neoklasyczny model wzrostu (model Ramseya)

Neoklasyczny model wzrostu (model Ramseya)

Autorzy: Ramsey (1928), Cass (1965), Koopmans (1965), Malinvaud

Inne nazwy: model Ramseya, model Ramseya-Cassa-Koopmansa, model RCK

Rozszerzenie modelu Solowa-Swana o decyzje gospodarstw domowych

Pozwala na ocenę dobrobytową polityk gospodarczych

Podstawowy (najważniejszy?) model współczesnej makroekonomii

Rozszerzenia modelu Ramseya wykorzystywane są w badaniach dotyczących zarówno wzrostu gospodarczego, jak i wahań koniunkturalnych

Zazwyczaj modele wzrostu gospodarczego prezentuje się w konwencji czasu ciągłego, jednak na potrzeby tych wykładów posłużymy się konwencją czasu dyskretnego (ułatwi to przejście do modeli wahań koniunkturalnych)

Uproszczenia i założenia

Gospodarka zamknięta

Brak sektora rządowego (na razie)

Doskonała konkurencja na rynkach dóbr i czynników produkcji

Doskonała informacja oraz brak efektów zewnętrznych

Homogeniczne dobro końcowe z ceną znormalizowaną do 1 w każdym okresie,
produkowane według neoklasycznej funkcji produkcji

Wszystkie zmienne są wyrażone w kategoriach realnych

Dwa rodzaje reprezentatywnych decydentów:

- Gospodarstwa domowe
- Firmy

Gospodarstwa domowe są bezpośrednimi właścicielami czynników produkcji

Porównanie z modelem nakładających się pokoleń (OLG)

W modelu OLG gospodarstwa domowe są „samolubne”: biorą pod uwagę tylko własną użyteczność i konsumują wszystkie posiadane zasoby przed śmiercią

W modelu Ramseya rodzice są doskonale altruistyczni: użyteczność ich dzieci jest równie ważna, co ich własna

W ten sposób gospodarstwo domowe staje się **dynastią** o potencjalnie nieskończonym horyzoncie planowania

W każdym okresie łączne dochody z pracy i kapitału rodziny finansują konsumpcję rozdzielaną po równo po wszystkich członkach rodziny

Konstrukcja funkcji dobrobytu dynastii

Obecni członkowie rodziny dbają o przyszłych członków rodziny:

$$U_t = u(c_t) + \beta U_{t+1}$$

Konstrukcja funkcji dobrobytu dynastii:

$$U_0 = u(c_0) + \beta U_1 = u(c_0) + \beta [u(c_1) + \beta U_2] = u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 U_2$$

$$U_0 = u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 u(c_2) + \beta^3 u(c_3) + \dots$$

Stosując wygodną notację sumy:

$$U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Tam, gdzie będzie to wygodne, posłużymy się stopą dyskontową ρ :

$$\beta \equiv \frac{1}{1 + \rho}, \quad \rho \equiv \frac{1}{\beta} - 1$$

Funkcja użyteczności typu CRRA

Na potrzeby wykładu będziemy posługiwać się funkcją użyteczności o stałej relatywnej awersji do ryzyka (Constant Relative Risk Aversion, CRRA):

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} (-1)}{1-\sigma} \quad \rightarrow \quad u'(c) = c^{-\sigma}$$

gdzie $\sigma > 0$. Można wykazać, że dla $\sigma = 1$ CRRA staje się logarytmiczna

Parametr σ reguluje relatywną siłę efektów substytucyjnego i dochodowego: im wyższa σ , tym „gładsza” jest optymalna sekwencja konsumpcji w czasie i tym słabiej konsumpcja reaguje na zmiany realnej stopy procentowej

Konstrukcja ograniczenia budżetowego dynastii

Łączne dochody z pracy i kapitału rozdzielane są na konsumpcję i aktywa:

$$C_t + Aktywa_{t+1} = w_t L_t + (1 + r_t) Aktywa_t \quad | \quad : L_t$$
$$\frac{C_t}{L_t} + \frac{Aktywa_{t+1}}{L_t} = w_t + (1 + r_t) \frac{Aktywa_t}{L_t}$$

Ponieważ liczba osób pracujących L jest proporcjonalna do wszystkich osób N , zignorujemy różnicę między konsumpcją na osobę, a konsumpcją na pracownika

Tak jak w modelu Solowa, populacja całkowita i osób pracujących rośnie w tempie n

Zdefiniujemy przez a_t aktywa na pracownika: $a_t \equiv Aktywa_t / L_t$

$$c_t + \frac{L_{t+1}}{L_t} \frac{Aktywa_{t+1}}{L_{t+1}} = w_t + (1 + r_t) a_t$$
$$c_t + (1 + n) a_{t+1} = w_t + (1 + r_t) a_t$$

Problem maksymalizacji dobrobytu dynastii gospodarstw domowych

Dynastia maksymalizuje funkcję dobrobytu swoich członków:

$$\max_{\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

pod warunkami $c_t + (1+n) a_{t+1} = w_t + (1+r_t) a_t$ dla każdego $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$

$a_0 > 0$ dane

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \lambda_t a_{t+1} = 0$$

Skonstruowaną funkcję Lagrange'a „rozpiszemy” wokół zmiennych c_t i a_{t+1} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda_t [w_t + (1+r_t) a_t - c_t - (1+n) a_{t+1}] \right\} \\ &= \dots + \beta^t \left\{ \frac{\mathbf{c}_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda_t [w_t + (1+r_t) a_t - \mathbf{c}_t - (1+n) \mathbf{a}_{t+1}] \right\} \\ &\quad + \beta^{t+1} \left\{ \frac{c_{t+1}^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda_{t+1} [w_{t+1} + (1+r_{t+1}) \mathbf{a}_{t+1} - c_{t+1} - (1+n) a_{t+2}] \right\} + \dots \end{aligned}$$

Problem dynastii gospodarstw domowych: rozwiązanie

„Rozpisany” Lagranżjan:

$$\mathcal{L} = \beta^t \left\{ \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda_t [w_t + (1+r_t) a_t - c_t - (1+n) a_{t+1}] \right\} \\ + \beta^{t+1} \left\{ \frac{c_{t+1}^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda_{t+1} [w_{t+1} + (1+r_{t+1}) a_{t+1} - c_{t+1} - (1+n) a_{t+2}] \right\} + \dots$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$c_t : \quad \beta^t \{ c_t^{-\sigma} - \lambda_t \} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_t = c_t^{-\sigma}$$

$$a_{t+1} : \quad \beta^t \{ -\lambda_t (1+n) \} + \beta^{t+1} \{ \lambda_{t+1} (1+r_{t+1}) \} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_t = \frac{\beta (1+r_{t+1})}{1+n} \lambda_{t+1}$$

Otrzymujemy **równanie Eulera** dla funkcji typu CRRA, gdzie $\beta \equiv 1/(1+\rho)$:

$$c_t^{-\sigma} = \frac{\beta (1+r_{t+1})}{1+n} c_{t+1}^{-\sigma} \quad \rightarrow \quad c_{t+1} = \left[\frac{1+r_{t+1}}{(1+\rho)(1+n)} \right]^{1/\sigma} c_t$$

Konsumpcja rośnie z czasem, o ile $1+r_{t+1} > (1+\rho)(1+n)$

Problem maksymalizacji zysku firm

Ponownie zaczniemy od wariantu ze stałym poziomem technologii $\bar{A}$

Reprezentatywna firma w każdym z okresów maksymalizuje zysk Π :

$$\max_{K_t, L_t} \Pi_t = 1 \cdot Y_t - w_t L_t - (r_t + \delta) K_t$$

$$\text{pod warunkiem } Y_t = \bar{A} K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \rightarrow y_t = f(k_t) = \bar{A} k_t^\alpha$$

Wstawmy funkcję produkcji do funkcji zysku:

$$\max_{K_t, L_t} \Pi_t = \bar{A} K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - (r_t + \delta) K_t$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$K_t : \alpha \cdot \bar{A} K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - (r_t + \delta) = 0 \rightarrow r_t = \alpha \bar{A} k_t^{\alpha-1} - \delta$$

$$L_t : (1 - \alpha) \bar{A} K_t^\alpha L_t^{-\alpha} = 0 \rightarrow w_t = (1 - \alpha) \bar{A} k_t^\alpha$$

Ceny czynników produkcji zależą od bieżącego poziomu kapitału na pracownika k

Ponieważ f. prod. spełnia stałe przychody skali i rynki są konkurencyjne, zysk wynosi 0

Równowaga ogólna

Na rynku kapitału popyt na niego (K_t) równa się jego podaży ($Aktywa_t$):

$$K_t = Aktywa_t \rightarrow k_t = a_t$$

Wstawmy informacje o cenach do ograniczenia budżetowego gospodarstw domowych:

$$c_t + (1 + n) a_{t+1} = w_t + (1 + r_t) a_t$$

$$c_t + (1 + n) k_{t+1} = (1 - \alpha) \bar{A} k_t^\alpha + (1 + \alpha \bar{A} k_t^{\alpha-1} - \delta) k_t$$

$$c_t + (1 + n) k_{t+1} = \bar{A} k_t^\alpha + (1 - \delta) k_t$$

$$(1 + n) k_{t+1} = (y_t - c_t) + (1 - \delta) k_t$$

Powyższe **ograniczenie zasobowe** możemy zapisać podobnie jak w modelu Solowa:

$$(1 + n) k_{t+1} = s_t y_t + (1 - \delta) k_t$$

gdzie $s_t \equiv (y_t - c_t) / y_t$ jest **endogeniczną stopą oszczędności / inwestycji**

Równania dynamiczne modelu Ramseya

Mamy już ograniczenie zasobowe ($Y_t = C_t + I_t$):

$$(1 + n) k_{t+1} = \bar{A} k_t^\alpha + (1 - \delta) k_t - c_t$$

Wstawiamy informacje o (przyszłej!) stopie zwrotu z kapitału do równania Eulera:

$$c_{t+1} = \left[\frac{1 + \alpha \bar{A} k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta}{(1 + \rho)(1 + n)} \right]^{1/\sigma} c_t$$

Otrzymujemy system dwóch równań dynamicznych

Tym razem mamy do czynienia nie ze zbieżnością globalną systemu (jak u Solowa), ale ze zbieżnością typu „ścieżka siodłowa”

Daje nam to **jednoznaczne** rozwiązanie: istnieje **jeden** optymalny ciąg $\{s_t\}_{t=0}^\infty$ (zgodny z preferencjami gosp. dom.) prowadzący system do stanu ustalonego

Ustalając np. $s_t = s^*$ również dotarlibyśmy do tego samego stanu ustalonego, ale dobrobyt gospodarstw domowych byłby wtedy niższy!

Stan ustalony modelu Ramseya

Znajdujemy stan ustalony ($c_{t+1} = c_t = c^*$ oraz $k_{t+1} = k_t = k^*$):

$$c^* = \left[\frac{1 + \alpha \bar{A} (k^*)^{\alpha-1} - \delta}{(1 + \rho)(1 + n)} \right]^{1/\sigma} c^* \quad \text{oraz} \quad c^* + (1 + n) k^* = \bar{A} (k^*)^\alpha + (1 - \delta) k^*$$

Zaczynamy od równania Eulera (dla wygody pomińmy na chwilę $*$):

$$\begin{aligned} 1 + \alpha \bar{A} k^{\alpha-1} - \delta &= (1 + \rho)(1 + n) \simeq 1 + \rho + n & | & -1 + \delta \\ \alpha \bar{A} k^{\alpha-1} &\simeq \rho + \delta + n & | & : \alpha \bar{A} \\ k^{\alpha-1} &\simeq \frac{\rho + \delta + n}{\alpha \bar{A}} & | & ^{(-1/(1-\alpha))} \\ k^* &\simeq \left(\frac{\alpha \bar{A}}{\rho + \delta + n} \right)^{1/(1-\alpha)} \end{aligned}$$

Znając k^* , ustalamy c^* z ograniczenia zasobowego:

$$c^* = \bar{A} (k^*)^\alpha + (1 - \delta) k^* - (1 + n) k^* = \bar{A} (k^*)^\alpha - (\delta + n) k^*$$

Dynamiczna efektywność w modelu Ramseya

Kapitał na pracownika w stanie ustalonym w modelu Ramseya:

$$k^* = \left(\frac{\alpha \bar{A}}{\rho + \delta + n} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

Kapitał na pracownika w stanie ustalonym w modelu Solowa:

$$k^* = \left(\frac{s \bar{A}}{\delta + n} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

Stopa oszczędności w modelu Ramseya jest równa $s_{GR} = \alpha$ tylko jeśli $\rho = 0$

Ponieważ $\rho \geq 0$, gospodarka modelu Ramseya jest zawsze dynamicznie efektywna

W modelu Ramseya gospodarstwa domowe mają dostęp do doskonałych (kompletnych) rynków finansowych i ubezpieczeniowych, co sprawia, że spełnione są wszystkie założenia **Pierwszego Fundamentalnego Twierdzenia Dobrobytu**

Polityka gospodarcza w modelu Ramseya co najwyżej nie obniża dobrobytu

Dynamika modelu Ramseya

Dynamika modelu Ramseya: rozwiązanie analityczne

Założmy logarytmiczną użyteczność ($\sigma = 1$) i całkowitą deprecjację kapitału ($\delta = 1$):

$$\text{Równanie Eulera} \quad : \quad \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{\alpha \bar{A} k_{t+1}^{\alpha-1}}{(1+\rho)(1+n)}$$

$$\text{Ograniczenie zasobowe} \quad : \quad (1+n) k_{t+1} = \bar{A} k_t^\alpha - c_t$$

„Zgadniemy i zweryfikujemy”, że (jak u Solowa) stopa oszczędności jest stała:

$$c_t = (1-s) y_t = (1-s) \bar{A} k_t^\alpha$$

Równanie Eulera, gdzie $\beta \equiv 1/(1+\rho)$:

$$\frac{(1-s) \bar{A} k_{t+1}^\alpha}{(1-s) \bar{A} k_t^\alpha} = \frac{\alpha \bar{A} k_{t+1}^{\alpha-1}}{(1+\rho)(1+n)} \quad \rightarrow \quad (1+n) k_{t+1} = \frac{\alpha}{1+\rho} \bar{A} k_t^\alpha = \alpha\beta \cdot \bar{A} k_t^\alpha$$

Ograniczenie zasobowe:

$$\alpha\beta \cdot \bar{A} k_t^\alpha = \bar{A} k_t^\alpha - c_t \quad \rightarrow \quad c_t = (1-\alpha\beta) \bar{A} k_t^\alpha \quad \rightarrow \quad s = \alpha\beta \leq \alpha$$

Dynamika modelu Ramseya: rozwiązanie analityczne

Ponieważ $s_t = \alpha\beta$, możemy wyrazić równania **ścieżki przejścia** analitycznie:

$$k_{t+1} = \frac{\alpha\beta \cdot \bar{A}k_t^\alpha}{1+n}$$

$$c_t = (1 - \alpha\beta) \bar{A}k_t^\alpha$$

Zachowanie c i k w czasie

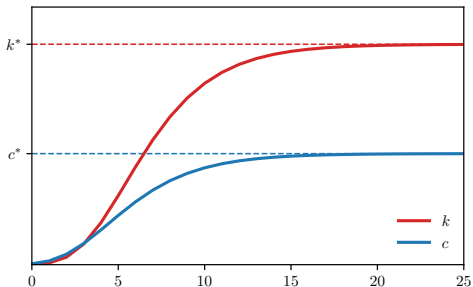
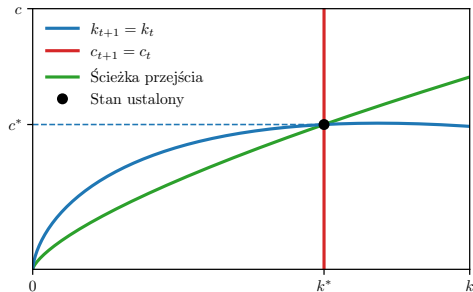


Diagram fazowy



Model Ramseya poza szczególnymi przypadkami nie ma rozwiązań analitycznych

Rozwiązania możemy jednak łatwo znajdować quasi-analitycznie lub numerycznie:

- Aproksymując liniowo równania dynamiczne wokół stanu ustalonego
- Metodami Newtona do rozwiązywania systemów równań nieliniowych
- Metodami rozwiązywania numerycznego systemów równań różniczkowych / różnicowych
- Metodami programowania dynamicznego
- Metodą „strzelania”

Dynamika modelu Ramseya: metoda „strzelania”

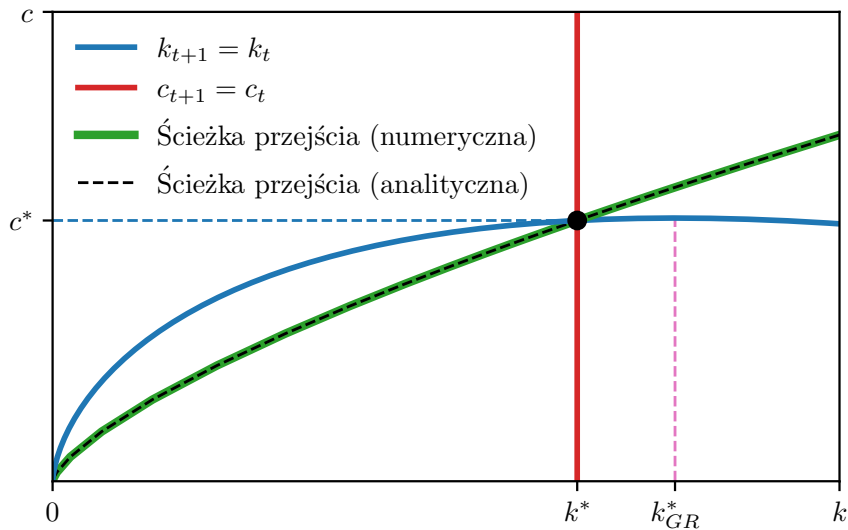
Opis algorytmu „strzelania”:

1. Dla początkowego poziomu k_0 zaproponuj początkową konsumpcję c_0
2. Wylicz ścieżkę za pomocą równań dynamicznych:

$$k_{t+1} = \frac{\bar{A}k_t^\alpha + (1 - \delta)k_t - c_t}{1 + n}$$
$$c_{t+1} = \left[\frac{1 + \alpha \bar{A}k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta}{(1 + \rho)(1 + n)} \right]^{1/\sigma} c_t$$

3. Wylicz kryterium zbieżności do stanu ustalonego (o ile „spudłowaliśmy”?)
4. Znajdź c_0 minimalizujące „pudło” dla zadanego k_0
5. Uzyskane ciągi $\{k_t, c_t\}_{t=0}^\infty$ leżą na ścieżce przejścia

Dynamika modelu Ramseya: rozwiązanie numeryczne



Konstrukcja diagramu fazowego

Z równania Eulera otrzymujemy warunek na $c_{t+1} = c_t$ (gdzie $r_{t+1} = \alpha \bar{A} k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta$):

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left[\frac{1 + \alpha \bar{A} k_{t+1}^{\alpha-1} - \delta}{(1 + \rho)(1 + n)} \right]^{1/\sigma}$$

Jeśli $k_t < k^*$, to $k_{t+1} < k^*$, z kolei $k_{t+1}^{\alpha-1} > (k^*)^{\alpha-1}$ i $r_{t+1} > r^*$, a zatem $c_{t+1} > c_t$

Z ograniczenia zasobowego otrzymujemy warunek na $k_{t+1} = k_t \rightarrow \Delta k_{t+1} = 0$:

$$\Delta k_{t+1} \equiv k_{t+1} - k_t = \frac{\bar{A} k_t^\alpha + (1 - \delta) k_t - c_t - (1 + n) k_t}{1 + n} = \frac{\bar{A} k_t^\alpha - (\delta + n) k_t - c_t}{1 + n}$$

Jeśli $c_t < \bar{A} k_t^\alpha - (\delta + n) k_t$, to $\Delta k_{t+1} > 0$, a zatem $k_{t+1} > k_t$

Ścieżka przejścia może znajdować się tylko w tych obszarach wykresu,

gdzie jednocześnie $c_{t+1} > c_t$ oraz $k_{t+1} > k_t$ lub jednocześnie $c_{t+1} < c_t$ oraz $k_{t+1} < k_t$

Kształt ścieżki przejścia

W szczególnym przypadku, gdy $\sigma = \alpha$, optymalna konsumpcja jest liniowa względem k :

$$c_t \simeq \left[\frac{\rho + \delta + n}{\alpha} - (\delta + n) \right] k_t$$

Co jeśli $\sigma \neq \alpha$?

- Jeśli $\sigma < \alpha$, to ścieżka przejścia jest wypukła: przebiega poniżej prostej łączącej punkty $(0, 0)$ i (k^*, c^*) , a konwergencja do stanu ustalonego jest szybsza
- Jeśli $\sigma > \alpha$, to ścieżka przejścia jest wklęsła: przebiega powyżej prostej łączącej punkty $(0, 0)$ i (k^*, c^*) , a konwergencja do stanu ustalonego jest wolniejsza

Oszacowania empiryczne wskazują, że $\alpha \approx 1/3$ i $\sigma \approx 2$ (ostatni przypadek)

Oznacza to, że jeśli technologia się (jednorazowo) poprawia, konsumpcja natychmiast rośnie; wrócimy do tej własności przy okazji modeli realnych wahań koniunkturalnych

Stopa oszczędności na ścieżce przejścia

Stopa oszczędności w modelu Ramseya:

$$s \equiv \frac{y - c}{y} \rightarrow s^* = \frac{y^* - [y^* - (\delta + n) k^*]}{y^*} = \frac{(\delta + n) k^*}{y^*}$$

Dla funkcji Cobba-Douglasa mamy:

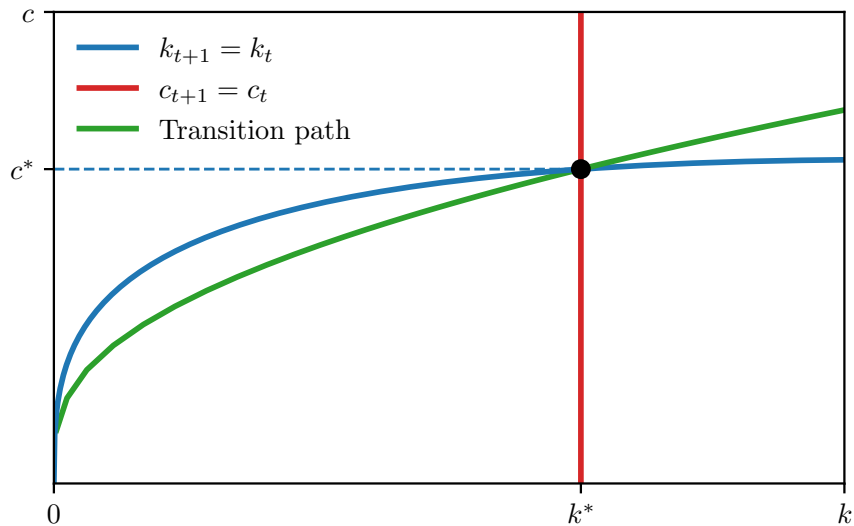
$$k^* = \left(\frac{\alpha \bar{A}}{\rho + \delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{oraz} \quad y = \bar{A} k^\alpha \rightarrow s^* = \frac{\delta + n}{\bar{A}} (k^*)^{1-\alpha} = \frac{(\delta + n) \alpha}{\rho + \delta + n} \leq \alpha$$

Można udowodnić, że jeśli $s^* = 1/\sigma$, to $[s(t)]_{t=0}^\infty = s^*$

- Jeśli $s^* > 1/\sigma$, to stopa oszczędności początkowo jest niska i rośnie w miarę konwergencji do stanu ustalonego
- Jeśli $s^* < 1/\sigma$, to stopa oszczędności początkowo jest wysoka i spada w miarę konwergencji do stanu ustalonego

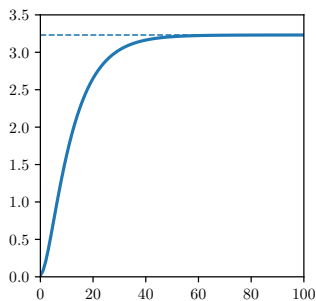
Ponownie, realistyczny jest ostatni przypadek, ponieważ $s^* \leq \alpha \approx 1/3$ i $\sigma \approx 2$

Dynamika modelu Ramseya: „realistyczne” parametry

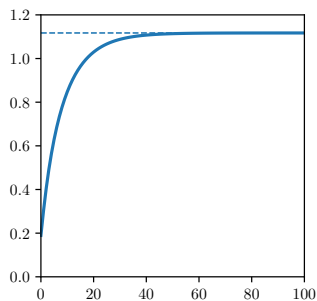


Dynamika modelu Ramseya: „realistyczne” parametry

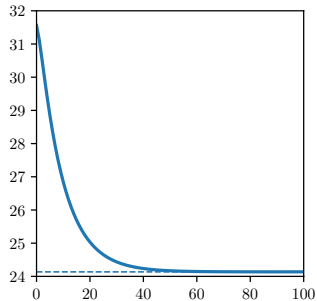
Zachowanie $k(t)$ w czasie



Zachowanie $c(t)$ w czasie



Zachowanie $s(t)$ w czasie



Problemem empirycznym modelu Ramseya jest ponownie tempo konwergencji, które jest jeszcze wyższe, niż w modelu Solowa (ponieważ $[s(t)]_{t=0}^{\infty} \geq s^*$)

Stopa oszczędności na ścieżce przejścia: użyteczność Stone'a-Geary'ego

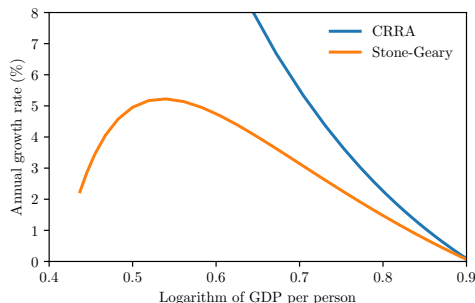
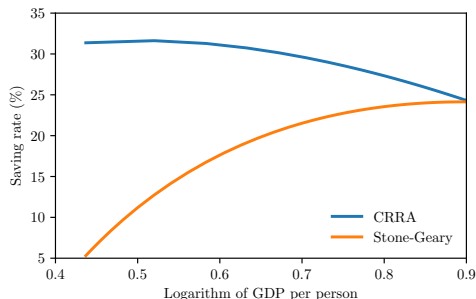
Tempo konwergencji można obniżyć używając funkcji użyteczności Stone'a-Geary'ego:

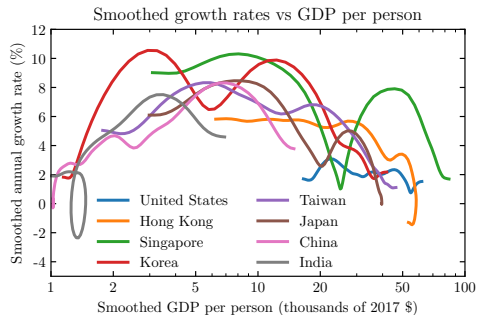
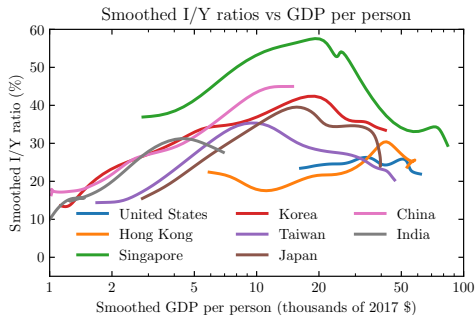
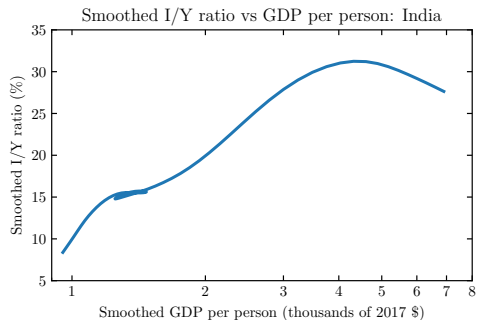
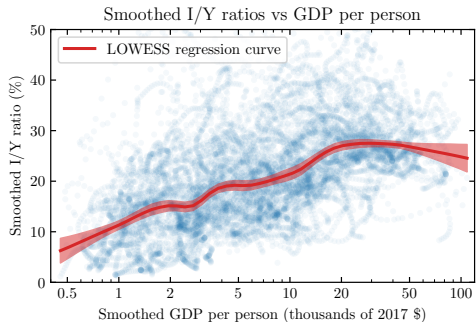
$$u(c) = \frac{(c - \bar{c})^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

W gospodarkach produkujących niewiele powyżej $\bar{c}$ stopa oszczędności jest bliska 0

Stopa oszczędności początkowo rośnie z PKB na osobę, pomimo tego, że $s^* < 1/\sigma$

W związku z tym najszybciej rosną gospodarki o „średnim” poziomie PKB na osobę





Model Ramseya z postępem technologicznym

Zakładamy, że technologia rośnie w tempie g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t$$

Ponownie skorzystamy ze zmiennych na efektywne jednostki pracy:

$$\hat{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}, \quad \hat{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t}, \quad \hat{c}_t \equiv \frac{C_t}{A_t L_t}$$

Problem maksymalizacji zysku firm:

$$\max_{K_t, L_t} \Pi_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} - w_t L_t - (r_t + \delta) K_t$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$K_t : \quad \alpha K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} - (r_t + \delta) = 0 \quad \rightarrow \quad r_t = \alpha \hat{k}_t^{\alpha-1} - \delta$$

$$L_t : \quad (1 - \alpha) K_t^\alpha A_t^{1-\alpha} L_t^{-\alpha} - w_t = 0 \quad \rightarrow \quad w_t = (1 - \alpha) A_t \hat{k}_t^\alpha$$

Ceny czynników produkcji zależą od kapitału na efektywne jednostki pracy $\hat{k}$

Nie musimy rozwiązywać ponownie problemu gospodarstw domowych, wykorzystamy tylko definicję konsumpcji na efektywne jednostki pracy:

$$\hat{c}_t = \frac{C_t/L_t}{A_t} = \frac{c_t}{A_t} \quad \rightarrow \quad c_t = \hat{c}_t A_t$$

Wyrażamy **równanie Eulera** w zmiennych na efektywne jednostki pracy:

$$\begin{aligned} c_{t+1} &= \left[\frac{1 + r_{t+1}}{(1 + \rho)(1 + n)} \right]^{1/\sigma} c_t & \rightarrow & \quad \hat{c}_{t+1} A_{t+1} = \left[\frac{1 + r_{t+1}}{(1 + \rho)(1 + n)} \right]^{1/\sigma} \hat{c}_t A_t \\ \hat{c}_{t+1} &= \left[\frac{1 + r_{t+1}}{(1 + \rho)(1 + n)} \right]^{1/\sigma} \frac{\hat{c}_t}{1 + g} & \rightarrow & \quad \frac{\hat{c}_{t+1}}{\hat{c}_t} = \left[\frac{1 + r_{t+1}}{(1 + \rho)(1 + n)(1 + g)^\sigma} \right]^{1/\sigma} \end{aligned}$$

Skorzystajmy z bardziej eleganckiej wersji równania Eulera **dla czasu ciągłego**:

$$\begin{aligned} g_{\hat{c}} &\simeq \ln(\hat{c}_{t+1}/\hat{c}_t) = (1/\sigma) [\ln(1 + r_{t+1}) - \ln(1 + \rho) - \ln(1 + n) - \sigma \ln(1 + g)] \\ g_{\hat{c}} &\simeq \frac{r_{t+1} - \rho - n - \sigma g}{\sigma} \end{aligned}$$

Równowaga ogólna

Równowaga na rynku kapitału i aktywów:

$$\begin{aligned} K_t &= Aktywa_t && \rightarrow && k_t = a_t \\ \hat{k}_t &= \frac{K_t/L_t}{A_t} = \frac{k_t}{A_t} && \rightarrow && a_t = \hat{k}_t A_t \end{aligned}$$

Wstawiamy informacje o cenach do ograniczenia budżetowego gospodarstw domowych:

$$\begin{aligned} c_t + (1+n) a_{t+1} &= w_t + (1+r_t) a_t \\ \hat{c}_t A_t + (1+n) \hat{k}_{t+1} A_{t+1} &= (1-\alpha) A_t \hat{k}_t^\alpha + (1+\alpha \hat{k}_t^{\alpha-1} - \delta) \hat{k}_t A_t & | & : A_t \\ \hat{c}_t + (1+n) \hat{k}_{t+1} \frac{A_{t+1}}{A_t} &= (1-\alpha) \hat{k}_t^\alpha + (1+\alpha \hat{k}_t^{\alpha-1} - \delta) \hat{k}_t \\ \hat{c}_t + (1+n) (1+g) \hat{k}_{t+1} &= \hat{k}_t^\alpha + (1-\delta) \hat{k}_t \\ (1+n) (1+g) \hat{k}_{t+1} &= \hat{k}_t^\alpha - \hat{c}_t + (1-\delta) \hat{k}_t \end{aligned}$$

Ponownie otrzymujemy **ograniczenie zasobowe** (czyli $Y_t = C_t + I_t$)

Dynamika modelu Ramseya z postępem technologicznym

Otrzymujemy system dwóch równań dynamicznych (gdzie $r_{t+1} = \alpha \hat{k}_{t+1}^{\alpha-1} - \delta$):

$$\text{Równanie Eulera} \quad : \quad g_{\hat{c}} \simeq \frac{\alpha \hat{k}_{t+1}^{\alpha-1} - \delta - \rho - n - \sigma g}{\sigma}$$

$$\text{Ograniczenie zasobowe} \quad : \quad (1+n)(1+g)\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t^\alpha + (1-\delta)\hat{k}_t - \hat{c}_t$$

Ścieżka zrównoważonego wzrostu ($g_{\hat{c}} = 0 \rightarrow \hat{c}_{t+1} = \hat{c}_t = \hat{c}^*$ oraz $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t = \hat{k}^*$):

$$0 = g_{\hat{c}} \simeq \frac{\alpha \hat{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - n - \sigma g}{\sigma}$$

$$\alpha \hat{k}^{\alpha-1} \simeq \rho + \delta + n + \sigma g$$

$$\hat{k}^* \simeq \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta + n + \sigma g} \right)^{1/(1-\alpha)} \quad \text{oraz} \quad r^* \simeq \rho + n + \sigma g$$

$$\hat{c}^* + (1+n)(1+g)\hat{k}^* = (\hat{k}^*)^\alpha + (1-\delta)\hat{k}^* - \hat{c}^*$$

$$\hat{c}^* = (\hat{k}^*)^\alpha - (\delta + n + g + ng)\hat{k}^* \simeq (\hat{k}^*)^\alpha - (\delta + n + g)\hat{k}^*$$

Ścieżka zrównoważonego wzrostu

Wartości zmiennych na efektywne jednostki pracy na ścieżce zrównoważonego wzrostu:

$$\hat{k}^* \simeq \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta + n + \sigma g} \right)^{1/(1-\alpha)} \quad \text{oraz} \quad \hat{y}^* \simeq \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta + n + \sigma g} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$
$$\hat{c}^* \simeq \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta + n + \sigma g} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} - (\delta + n + g) \left(\frac{\alpha}{\rho + \delta + n + \sigma g} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

Jeśli $\rho = 0$ i $\sigma = 1$, to otrzymujemy poziom kapitału na efektywne jednostki pracy (oraz stopy zwrotu z kapitału) taki sam, jak w modelu Solowa przy założeniu $s = s_{GR} = \alpha$:

$$\hat{k}^* \simeq \left(\frac{\alpha}{\delta + n + g} \right)^{1/(1-\alpha)} \quad \text{oraz} \quad r^* \simeq n + g$$

Można wykazać, że dla dowolnego σ gospodarka modelu Ramseya jest dynamicznie efektywna. Im wyższe σ , tym niższe $\hat{k}^*$, $\hat{y}^*$ i $\hat{c}^*$ (gosp. dom. są bardziej „niecierpliwe”)

**O ile zmienne na efektywne jednostki pracy zależą ujemnie od g ,
zmienne na pracownika zależą dodatnio od g :** $y_t = A_0 (1 + g)^t \cdot \hat{y}_t$