



UNIwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Zaawansowana Makroekonomia

Wzrost gospodarczy: Wykład 2

Marcin Bielecki

Rok akademicki 2025/2026

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Wybór międzyokresowy konsumpcji

Problem maksymalizacji funkcji użyteczności

Konsument maksymalizuje użyteczność z konsumpcji w dwóch okresach

$$\max_{c_1, c_2, a} U = \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

$$\text{pod warunkami } c_1 + a = y_1$$

$$c_2 = y_2 + (1 + r) a$$

Użyteczność logarytmiczna dla łatwych obliczeń, czynnik dyskontujący $\beta \in [0, 1]$

Zmienne egzogeniczne: dochody $y_1, y_2 \geq 0$ i realna stopa procentowa $r \geq -1$

Zmienne wyboru: konsumpcja c_1, c_2 i zgromadzone na koniec okresu 1 aktywa a

Międzyokresowe ograniczenie budżetowe:

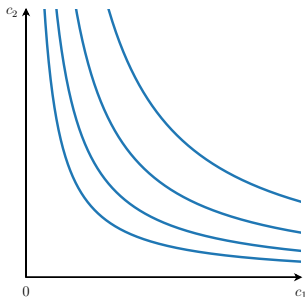
$$a = \frac{c_2 - y_2}{1 + r} \rightarrow c_1 + \frac{c_2 - y_2}{1 + r} = y_1 \rightarrow c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = y_1 + \frac{y_2}{1 + r}$$

Problem maksymalizacji funkcji użyteczności: interpretacja graficzna

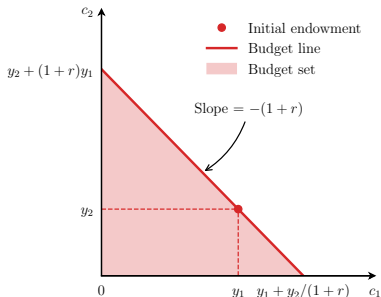
Szukamy takiej krzywej obojętności, która jest styczna do ograniczenia budżetowego

Punkt styczności jest rozwiązaniem problemu:

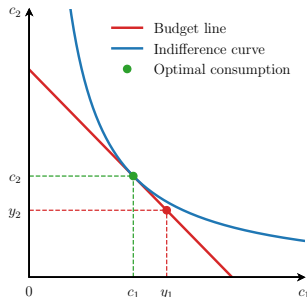
Krzywe obojętności



Ograniczenie budżetowe



Rozwiązanie graficzne



Metoda mnożników Lagrange'a

Konstruujemy funkcję Lagrange'a (lagranżjan):

$$\mathcal{L} = \ln c_1 + \beta \ln c_2 + \lambda \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right]$$

Wyprowadzamy warunki pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} c_1 \quad : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} &= \frac{1}{c_1} + \lambda [-1] = 0 & \rightarrow \quad \lambda_1 &= \frac{1}{c_1} \\ c_2 \quad : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} &= \beta \frac{1}{c_2} + \lambda \left[-\frac{1}{1+r} \right] = 0 & \rightarrow \quad \lambda &= \beta (1+r) \frac{1}{c_2} \end{aligned}$$

Otrzymujemy warunek optymalności (równanie Eulera):

$$\frac{1}{c_1} = \beta (1+r) \frac{1}{c_2} \quad \rightarrow \quad c_2 = \beta (1+r) c_1$$

Problem maksymalizacji funkcji użyteczności: rozwiązanie

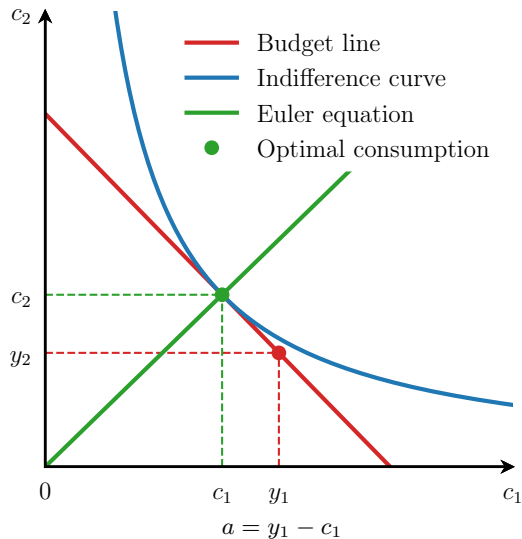
Wstawiamy warunek optymalności do ograniczenia budżetowego:

$$\begin{aligned}c_2 &= \beta (1 + r) c_1 \\c_1 + \frac{c_2}{1 + r} &= y_1 + \frac{y_2}{1 + r} \\c_1 + \beta c_1 &= y_1 + \frac{y_2}{1 + r}\end{aligned}$$

Optymalne wartości konsumpcji i aktywów:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{1 + \beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1 + r} \right] \\c_2 &= \frac{\beta}{1 + \beta} [(1 + r) y_1 + y_2] \\a &= \frac{1}{1 + \beta} \left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1 + r} \right]\end{aligned}$$

Problem maksymalizacji funkcji użyteczności: rozwiązanie



Skutki zmian parametrów problemu konsumenta

Konsument bardziej cierpliwy (wyższa β):

$$\frac{\partial c_1}{\partial \beta} < 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial \beta} > 0, \quad \frac{\partial a}{\partial \beta} > 0$$

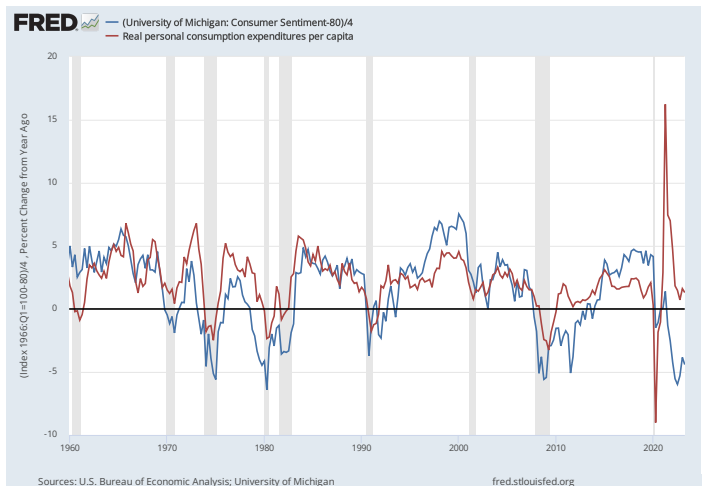
Wyższy dochód w pierwszym okresie:

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1} > 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial y_1} > 0, \quad \frac{\partial a}{\partial y_1} > 0$$

Wyższy (spodziewany) dochód w drugim okresie:

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_2} > 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial y_2} > 0, \quad \frac{\partial a}{\partial y_2} < 0$$

Nastroje konsumentów a wydatki konsumpcyjne w USA



Skutki wzrostu realnej stopy procentowej r

Efekt substytucyjny: konsumpcja w przyszłości staje się relatywnie tańsza, skłaniając konsumenta do przesunięcia konsumpcji z okresu pierwszego na drugi

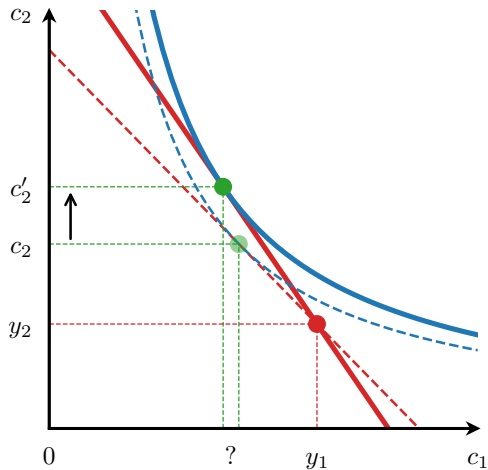
Efekt dochodowy zależy od pożądanego poziomu aktywów przed zmianą r :

- „Oszczędzający” ($a > 0$): powiększenie się zbioru budżetowego skłania konsumenta do zwiększenia konsumpcji w obu okresach
- „Zadłużony” ($a < 0$): zmniejszenie się zbioru budżetowego skłania konsumenta do zmniejszenia konsumpcji w obu okresach

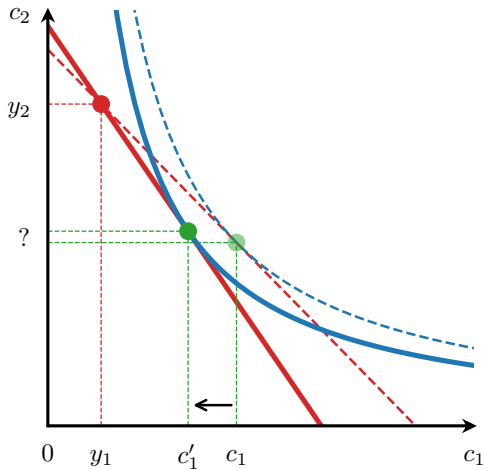
Efekty wzrostu r	Oszczędzający			Zadłużony		
	c_1	c_2	a	c_1	c_2	a
Substytucyjny	–	+	+	–	+	+
Dochodowy	+	+	–	–	–	+
Łączny	?	+	?	–	?	+

Skutki wzrostu realnej stopy procentowej r

Oszczędzający



Zadłużony



Skutki spadku stóp procentowych w danych

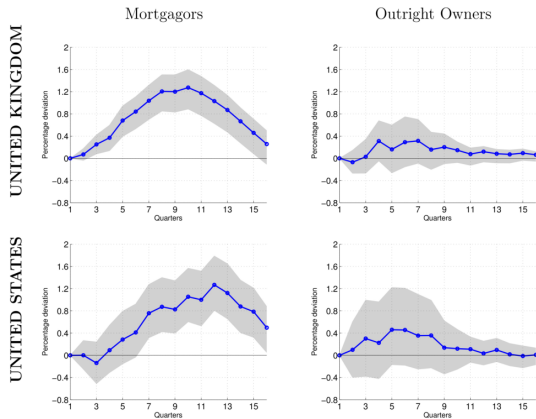
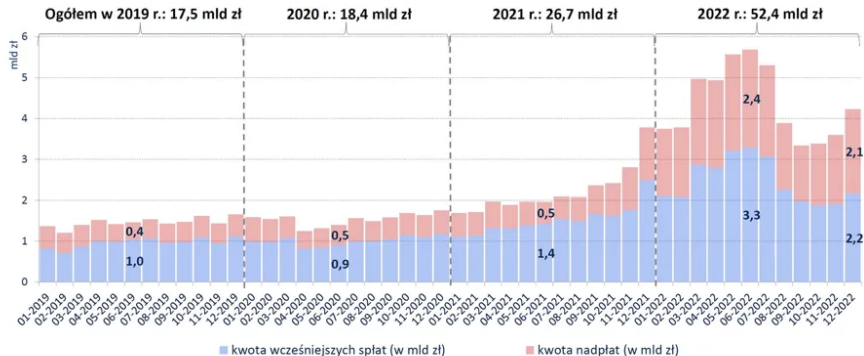


Figure 5: Dynamic effects of a 25 basis point unanticipated interest rate cut on the expenditure of durable goods by housing tenure group. Grey areas are bootstrapped 90% confidence bands. Top row: UK (FES/LCFS data). Bottom row: US (CEX data).

Skutki wzrostu stóp procentowych w danych

Klienci przyspieszyli wcześniejszą spłatę kredytów mieszkaniowych



Wcześniejsza spłata (do zera) – jeśli data zamknięcia rachunku jest wcześniejsza niż przewidywana data spłaty kredytu o co najmniej 6 miesięcy.

Nadpłata – jeśli na początku i końcu danego miesiąca kredyt był czynny i kwota do spłaty (w walucie oryginalnej) na końcu miesiąca jest niższa od tej z końca poprzedniego miesiąca o więcej niż 10%.

Źródło: BIK

11

Dodatkowe ograniczenia

Ograniczenie pożyczania

Tym razem konsument nie może się zadłużać ($a \geq 0$):

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, a} \quad & U = \ln c_1 + \beta \ln c_2 \\ \text{pod warunkami} \quad & c_1 + a = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1 + r) a \\ & a \geq 0 \end{aligned}$$

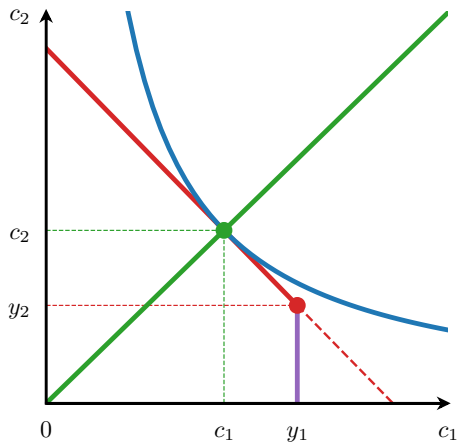
Albo konsument i tak wybrałby $a > 0$ i ograniczenie nie jest wiążące

Albo chciałby wybrać $a < 0$ i wtedy ograniczenie pożyczania jest wiążące:

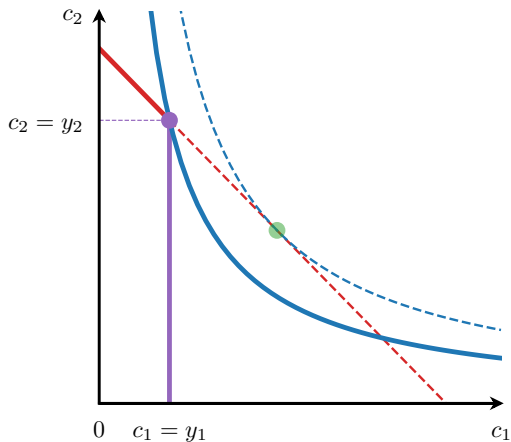
$$a = 0, \quad c_1 = y_1, \quad c_2 = y_2$$

Ograniczenie pożyczania: interpretacja graficzna

Przypadek 1: ograniczenie niewiążące



Przypadek 2: ograniczenie wiążące



W przypadku 2 konsument reaguje bieżącą konsumpcją na każdą zmianę dochodu

Ograniczenie pożyczania: podejście formalne

Lagranżjan (dwa oddzielne ograniczenia budżetowe i ograniczenie pożyczania):

$$\mathcal{L} = \ln c_1 + \beta \ln c_2 + \lambda_1 [y_1 - c_1 - a] + \lambda_2 [y_2 + (1+r)a - c_2] + \mu a$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} c_1 &: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} + \lambda_1 [-1] = 0 & \rightarrow \lambda_1 &= \frac{1}{c_1} \\ c_2 &: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta \frac{1}{c_2} + \lambda_2 [-1] = 0 & \rightarrow \lambda_2 &= \frac{\beta}{c_2} \\ a &: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \lambda_1 [-1] + \lambda_2 [1+r] + \mu = 0 & \rightarrow \lambda_1 &= \lambda_2 (1+r) + \mu \\ \text{KŚ} &: \mu a = 0 \quad \text{oraz} \quad \mu \geq 0 \quad \text{oraz} \quad a \geq 0 \end{aligned}$$

Ostatnia linijka to tzw. komplementarna ścisłość: albo $a = 0$, albo ograniczenie nie wiąże

Przypadek 1: ograniczenie niewiążące, $\mu = 0$ i $a \geq 0$

Warunek pierwszego rzędu względem aktywów upraszcza się:

$$\lambda_1 = \lambda_2 (1 + r) + \mu \quad \text{ i } \quad \mu = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 (1 + r)$$

Po wstawieniu pozostałych warunków otrzymujemy równanie Eulera:

$$\lambda_1 = \frac{1}{c_1} \quad \text{ i } \quad \lambda_2 = \frac{\beta}{c_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c_1} = \frac{\beta}{c_2} (1 + r) \quad \rightarrow \quad c_2 = \beta (1 + r) c_1$$

Optymalne wartości konsumpcji i aktywów:

$$c_1 = \frac{1}{1 + \beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1 + r} \right] \quad \text{ oraz } \quad c_2 = \frac{\beta}{1 + \beta} [(1 + r) y_1 + y_2]$$
$$a = \frac{1}{1 + \beta} \left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1 + r} \right]$$

Należy sprawdzić, czy rzeczywiście $a \geq 0$

Przypadek 2: ograniczenie wiążące, $\mu > 0$ i $a = 0$

Rozwiązanie wynika wprost z ograniczeń budżetowych:

$$c_1 + a = y_1, \quad c_2 = y_2 + (1 + r)a, \quad a = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = y_1 \quad \text{i} \quad c_2 = y_2$$

Należy zweryfikować wartość mnożnika μ :

$$\mu = \lambda_1 - \lambda_2 (1 + r) = \frac{1}{y_1} - \frac{\beta}{y_2} (1 + r)$$

Mnożnik μ mówi nam, o ile użyteczność wzrosłaby, gdyby ograniczenie było marginalnie poluzowane (konsument mógł pożyczyć „złotówkę”)

Jest tym większy, im większy jest przyszły dochód w porównaniu do bieżącego

Oprocentowanie kredytu > oprocentowanie oszczędności

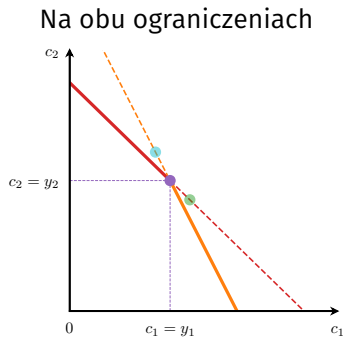
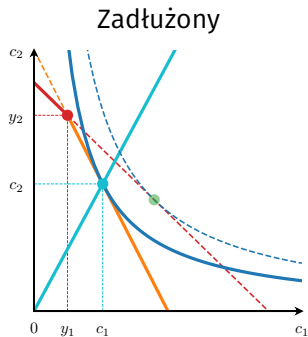
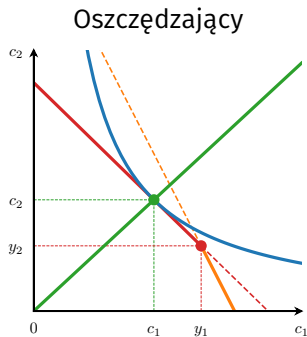
Podobną, ale bardziej realistyczną sytuacją jest ta, w której konsument może swobodnie zaciągnąć kredyt b , ale po wyższej stopie procentowej $r^b > r$

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, a, b} \quad & U = \ln c_1 + \beta \ln c_2 \\ \text{pod warunkami} \quad & c_1 + a = y_1 + b \\ & c_2 + (1 + r^b)b = y_2 + (1 + r)a \\ & a \geq 0 \\ & b \geq 0 \end{aligned}$$

Mamy wtedy trzy (sensowne) przypadki:

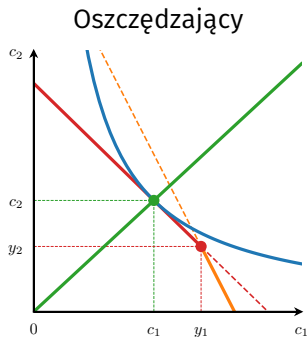
1. Oszczędzający: ($a > 0, b = 0$)
2. Zadłużony: ($a = 0, b > 0$)
3. Na obu ograniczeniach: ($a = 0, b = 0$)

Oprocentowanie kredytu > oprocentowanie oszczędności

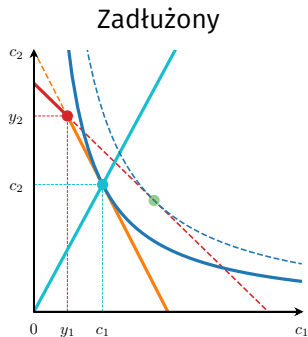


W ostatnim przypadku konsument lokalnie zachowuje się tak, jakby w ogóle nie mógł pożyczać

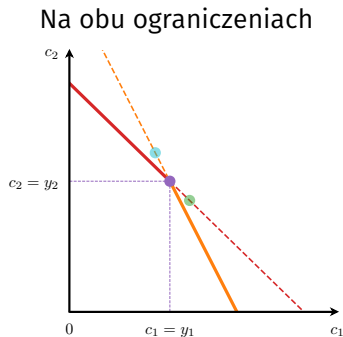
Wrażliwość bieżącej konsumpcji na politykę fiskalną (PF) i pieniężną (PP)



PF: ≈ 0
PP: niska



PF: niska
PP: wysoka



PF: wysoka
PP: ≈ 0

Równowaga ricardiańska (i jak ją złamać)

Ograniczenia budżetowe rządu:

$$g_1 = \tau_1 + b$$

$$g_2 + (1 + r) b = \tau_2$$

gdzie g_1 i g_2 to wydatki publiczne (na osobę) w okresach 1 i 2,
 τ_1 i τ_2 to podatki na osobę, a b to emisja obligacji (na osobę)
pokrywających deficyt w okresie 1, które trzeba spłacić w okresie 2

Jest to uproszczone ujęcie pełnego problemu dynamicznego:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{g_t - \tau_t}{(1 + r)^t} = b_0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b_t}{(1 + r)^t}$$

zakładający brak bankructwa rządu: $\lim_{t \rightarrow \infty} [b_t / (1 + r)^t] = 0$

Problem gospodarstw domowych

Konsumenci rozwiązują swój problem:

$$\max_{c_1, c_2, a} U = \ln c_1 + \beta \ln c_2$$

$$\text{pod warunkami} \quad c_1 + a = y_1 - \tau_1$$

$$c_2 = y_2 - \tau_2 + (1 + r) a$$

gdzie aktywa a są sumą obligacji b i pozostałych aktywów $\tilde{a}$

Międzyokresowe ograniczenie budżetowe:

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = y_1 - \tau_1 + \frac{y_2 - \tau_2}{1 + r}$$

Problem gospodarstw domowych: rozwiązanie

Lagranżjan:

$$\mathcal{L} = \ln c_1 + \beta \ln c_2 + \lambda \left[y_1 - \tau_1 + \frac{y_2 - \tau_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right]$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} c_1 &: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{1}{c_1} - \lambda = 0 & \rightarrow & \lambda = \frac{1}{c_1} \\ c_2 &: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta \frac{1}{c_2} - \frac{\lambda}{1+r} = 0 & \rightarrow & \lambda = \beta (1+r) \frac{1}{c_2} \end{aligned}$$

Warunek optymalności (równanie Eulera):

$$c_2 = \beta (1+r) c_1$$

Problem gospodarstw domowych: rozwiązanie

Ograniczenia budżetowe jeszcze raz:

$$\begin{aligned}c_1 + b + \tilde{a} &= y_1 - \tau_1 \quad \text{oraz} \quad b = g_1 - \tau_1 \quad \rightarrow \quad \tilde{a} = y_1 - g_1 - c_1 \\c_2 &= y_2 - \tau_2 + (1+r)(b + \tilde{a}) \quad \text{oraz} \quad b = \frac{\tau_2 - g_2}{1+r} \quad \rightarrow \quad c_2 = y_2 - g_2 + (1+r)\tilde{a}\end{aligned}$$

Międzyokresowe ograniczenie budżetowe:

$$c_2 = y_2 - g_2 + (1+r)(y_1 - g_1 - c_1) \quad \rightarrow \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 - g_1 + \frac{y_2 - g_2}{1+r}$$

Po wstawieniu równania Eulera:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{1+\beta} \left[y_1 - g_1 + \frac{y_2 - g_2}{1+r} \right] \quad \text{oraz} \quad c_2 = \frac{\beta}{1+\beta} [(1+r)(y_1 - g_1) + (y_2 - g_2)] \\a &= y_1 - \tau_1 - c_1 \quad \text{oraz} \quad \tilde{a} = y_1 - g_1 - c_1 \quad \text{oraz} \quad b = g_1 - \tau_1\end{aligned}$$

Zmiany sekwencji podatków w czasie nie wpływają na ścieżkę konsumpcji!

Dodatkowo, poziom aktywów zmienia się 1:1 ze zmianami podaży obligacji

Założenia stojące za równoważnością ricardiańską

Wszystkie aktywa mają taką samą stopę zwrotu (co do wartości oczekiwanej)

Podatki nie zniekształcają decyzji firm i gospodarstw domowych

Zmiany podatkowe są takie same dla wszystkich (brak redystrybucji)

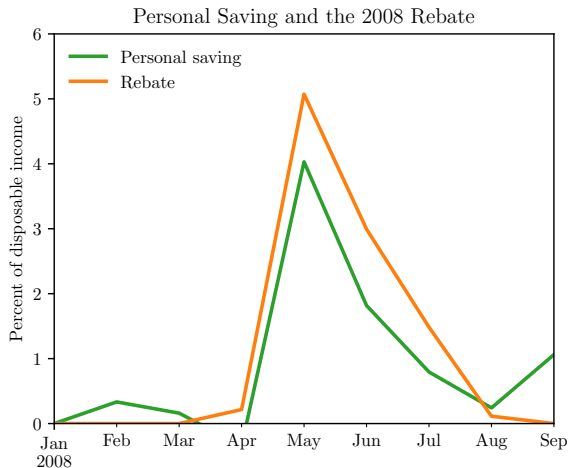
Nowy dług publiczny zostanie spłacony za życia obecnych gosp. dom.

Gospodarstwa domowe zdają sobie sprawę z ograniczeń budżetowych rządu

Gospodarstwa domowe nie mają żadnych ograniczeń pożyczania / płynności

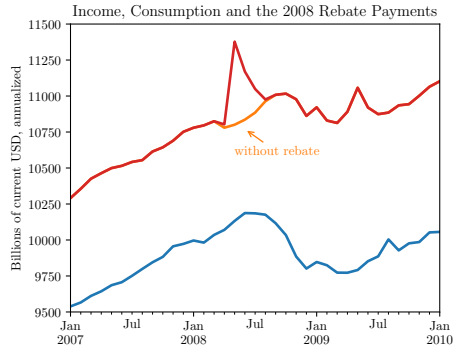
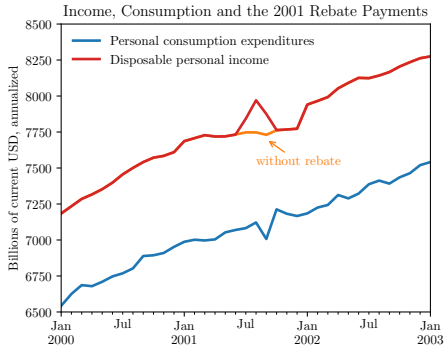
Gospodarstwa domowe mają preferencje tzw. spójne w czasie

Zwrot części zapłaconych podatków w 2008 a dodatkowe oszczędności



Taylor (2009), US Bureau of Economic Analysis

Zwrot części zapłaconych podatków w 2001 i 2008 a konsumpcja



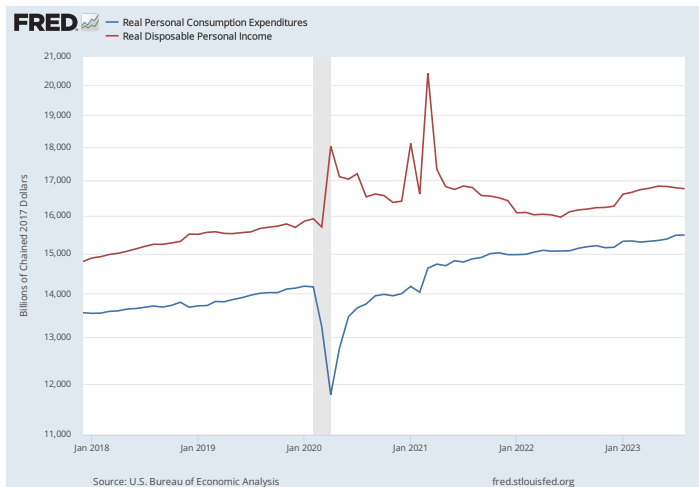
Taylor (2009), US Bureau of Economic Analysis

Zwrot części zapłaconych podatków w 2001 i 2008 a konsumpcja

PCE Regressions with Rebate Payments		
Lagged PCE	0.794 (0.057)	0.832 (0.056)
Rebate payments	0.048 (0.055)	0.081 (0.054)
Disposable personal income (w/o rebate)	0.206 (0.056)	0.188 (0.055)
Oil price (\$/bbl lagged 3 months)		-1.007 (0.325)
R^2	0.999	0.999

Taylor (2009)

Realna konsumpcja i dochód do dyspozycji od 2018 r.



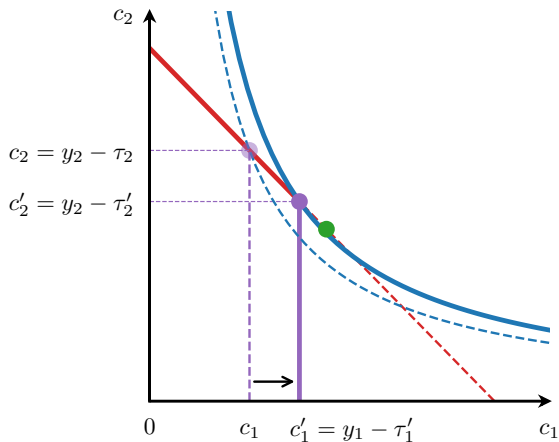
Heterogeniczna reakcja na zwrot części zapłaconych podatków

Responses to 2001 and 2008 Rebate Surveys

	2001		2008	
	Number	Percent	Number	Percent
Mostly spend	256	21.8	447	19.9
Mostly save	376	32.0	715	31.8
Mostly pay off debt	544	46.2	1083	48.2
Will not get rebate	223		212	
Don't know / refused	45		61	
Total	1444	100	2518	100

Shapiro i Slemrod (2003), Shapiro i Slemrod (2009)

Konsument na ograniczeniu pożyczania



Dopóki dochód do dyspozycji nie przesunie się do punktu „zielonego”, konsumpcja rośnie 1:1 przy redukcji podatków / zwiększeniu transferów

Gospodarstwa domowe z brakiem płynnych aktywów

Gospodarstwa domowe, których bieżąca konsumpcja jest w zasadzie równa bieżącemu dochodowi, a aktywa są bliskie 0 nazywamy typu „hand-to-mouth”

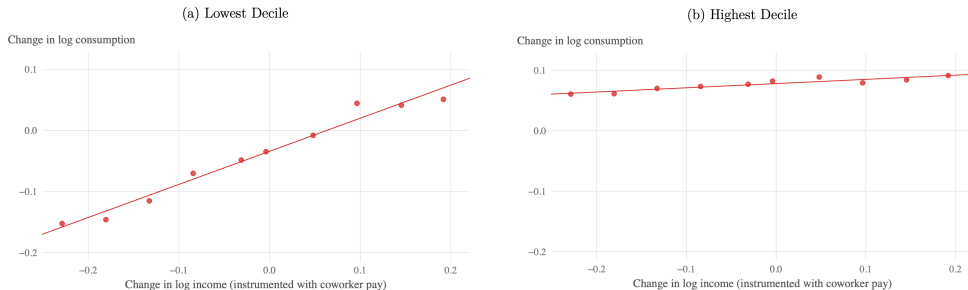
Lusardi et al. (2011), Broda i Parker (2012): 30-40% gospodarstw domowych w USA posiada płynne aktywa poniżej dwumiesięcznego dochodu. Ale to nie są „biedni” ludzie!

Kaplan i Violante (2014): w danych mikroekonomicznych ok. 10% gospodarstw domowych jest typu poor hand-to-mouth, ale ok. 33% jest typu wealthy hand-to-mouth: mają dodatnie aktywa, ale są to aktywa niepłynne (domy, fundusze emerytalne, itd.)

Konstruuja model z dwoma typami aktywów: płynne o niskiej stopie zwrotu oraz niepłynne o wysokiej stopie zwrotu, z kosztami transakcyjnymi pomiędzy nimi

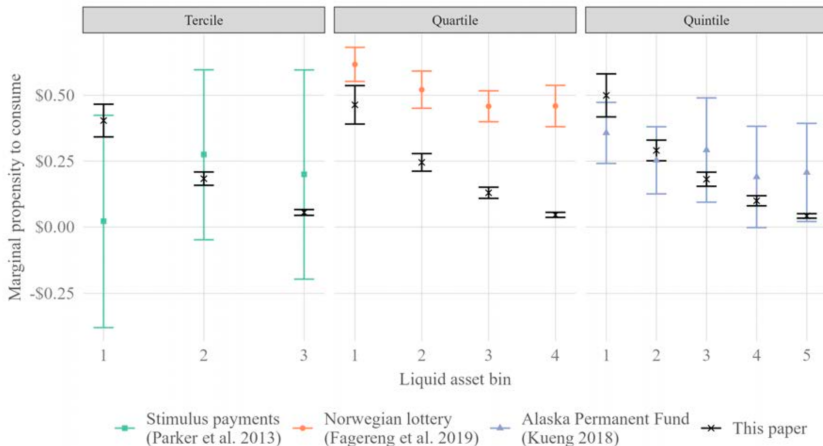
W ich modelu ok. 25% gospodarstw domowych natychmiast wydaje drobne, nieprzewidziane podwyżki dochodu. Jeśli transfery są duże, zamieniają je w aktywa niepłynne, zachowując się jak „standardowi” konsumenci

Figure 3: Consumption Sensitivity by Asset Buffer Decile



Ganong et al. (2023)

Figure 4: Marginal Propensity to Consume by Asset Buffer



Gospodarstwa „starsze” mogą liczyć na to,
że przyszłe wyższe podatki nie będą ich dotyczyć

Spending the 2008 Rebate, by Age	
Age group	Percent mostly spending
29 or less	11.7
30-39	14.2
40-49	16.9
50-64	19.9
65 or over	28.4

Shapiro i Slemrod (2009)

Model nakładających się pokoleń (OverLapping Generations, OLG)

Model nakładających się pokoleń (OLG)

Pionierzy: Allais (1947), Samuelson (1958) i Diamond (1965)

Zamknięta gospodarka bez sektora rządowego

Gospodarstwa domowe żyją przez dwa (długie) okresy:

1. W pierwszym okresie pracują, konsumują i oszczędzają („młodzi”)
2. W drugim okresie są na emeryturze i konsumują oszczędności („starzy”)

Funkcja produkcji i sektor firm taki sam, jak w modelu Solowa

Najprostszą (ale tylko tą!) wersję modelu można wykorzystać do wyprowadzenia modelu Solowa z mikropodstaw

Nakładające się pokolenia

		okres					
		1	2	3	4	5	...
okres narodzin	0	<i>o</i>					
	1	<i>y</i>	<i>o</i>				
	2		<i>y</i>	<i>o</i>			
	3			<i>y</i>	<i>o</i>		
	4				<i>y</i>	<i>o</i>	
	5					<i>y</i>	
	⋮						

W okresie t żyje N_t^y „młodych” (y) dorosłych o nieelastycznej podaży pracy:

$$L_t = N_t^y$$

Populacja „młodych” rośnie w tempie n :

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = \frac{N_{t+1}^y}{N_t^y} = \frac{(1+n) N_t^y}{N_t^y} = 1+n$$

Wszyscy „młodzi” dożywają do emerytury, a wszyscy „starzy” (o) umierają:

$$N_t^o = N_{t-1}^y$$

Tempo wzrostu całkowitej populacji $N_t = N_t^y + N_t^o$ również wynosi n

Młode gospodarstwo domowe w okresie t rozwiązuje problem:

$$\begin{aligned} \max_{c_t^y, c_{t+1}^o, a_{t+1}} \quad & U = \ln c_t^y + \beta \ln c_{t+1}^o \\ \text{pod warunkami} \quad & c_t^y + a_{t+1} = w_t \\ & c_{t+1}^o = (1 + r_{t+1}) a_{t+1} \end{aligned}$$

gdzie c_t^y to konsumpcja w okresie „młodości”, c_{t+1}^o w okresie „starości”,
 w_t to dochód z pracy przed emeryturą, a zgromadzone aktywa a_{t+1}
przyniosą realną stopę zwrotu r_{t+1} w okresie „starości” $t + 1$

Międzyokresowe ograniczenie budżetowe:

$$c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

Problem gospodarstw domowych: rozwiązanie

Lagranżjan:

$$\mathcal{L} = \ln c_t^y + \beta \ln c_{t+1}^o + \lambda \left[w_t - c_t^y - \frac{c_{t+1}^o}{1 + r_{t+1}} \right]$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} c_t^y &: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^y} = \frac{1}{c_t^y} - \lambda = 0 & \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{c_t^y} \\ c_{t+1}^o &: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}^o} = \beta \frac{1}{c_{t+1}^o} - \frac{\lambda}{1 + r_{t+1}} = 0 & \rightarrow \quad \lambda = \beta (1 + r_{t+1}) \frac{1}{c_{t+1}^o} \end{aligned}$$

Warunek optymalności (równanie Eulera):

$$\frac{1}{c_t^y} = \beta (1 + r_{t+1}) \frac{1}{c_{t+1}^o} \quad \rightarrow \quad c_{t+1}^o = \beta (1 + r_{t+1}) c_t^y$$

Problem gospodarstw domowych: rozwiązanie

Wstawiamy warunek optymalności do ograniczenia budżetowego:

$$\begin{aligned}c_{t+1}^o &= \beta (1 + r_{t+1}) c_t^y \\c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{1 + r_{t+1}} &= w_t \\c_t^y + \beta c_t^y &= w_t\end{aligned}$$

Optymalne wartości konsumpcji i aktywów:

$$c_t^y = \frac{1}{1 + \beta} w_t, \quad c_{t+1}^o = \frac{\beta}{1 + \beta} (1 + r_{t+1}) w_t \quad \text{oraz} \quad a_{t+1} = \frac{\beta}{1 + \beta} w_t$$

Przy logarytmicznej użyteczności i braku dochodów w okresie „starości” efekt substytucyjny i dochodowy stopy procentowej idealnie się znoszą

Jest to szczególny przypadek, w którym gospodarstwa domowe zachowują się dokładnie jak w modelu Solowa (zawsze oszczędzają stałą część dochodu)

Firmy produkują według funkcji Cobba-Douglasa i co okres rozwiązują problem:

$$\max_{K_t, L_t} \Pi_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} - (r_t + \delta) K_t - w_t L_t$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$K_t \quad : \quad \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} - (r_t + \delta) = 0 \quad \rightarrow \quad r_t = \alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^{\alpha-1} - \delta$$

$$L_t \quad : \quad \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = (1 - \alpha) K_t^\alpha A_t^{1-\alpha} L_t^{-\alpha} - w_t = 0 \quad \rightarrow \quad w_t = (1 - \alpha) A_t \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^\alpha$$

Ceny czynników produkcji zależą od kapitału na efektywne jednostki pracy $\hat{k}$:

$$r_t = \alpha \hat{k}_t^{\alpha-1} - \delta$$

$$w_t = (1 - \alpha) A_t \hat{k}_t^\alpha$$

Równowaga ogólna

Kapitał w okresie $t + 1$ jest równy aktywom zgromadzonym na koniec okresu t :

$$\begin{array}{lcl} K_{t+1} = N_t^y a_{t+1} & | & : A_t L_t \\ \frac{K_{t+1}}{A_t L_t} = \frac{N_t^y}{L_t} \frac{a_{t+1}}{A_t} & | & L_t = N_t^y, \quad a_{t+1} = \frac{\beta}{1 + \beta} w_t \\ \frac{A_{t+1}}{A_t} \frac{L_{t+1}}{L_t} \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} = \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{w_t}{A_t} & | & w_t = (1 - \alpha) A_t \hat{k}_t^\alpha \end{array}$$

$$(1 + n) (1 + g) \hat{k}_{t+1} = \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{(1 - \alpha) A_t \hat{k}_t^\alpha}{A_t}$$

Równanie opisujące dynamikę kapitału na efektywne jednostki pracy w czasie:

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{\beta / (1 + \beta) (1 - \alpha)}{(1 + n) (1 + g)} \hat{k}_t^\alpha$$

Stan ustalony $\hat{k}^*$ (ścieżka zrównoważonego wzrostu)

W stanie ustalonym $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t = \hat{k}^*$:

$$\begin{aligned}\hat{k}^* &= \frac{\beta / (1 + \beta) (1 - \alpha)}{(1 + n) (1 + g)} (\hat{k}^*)^\alpha \\ (\hat{k}^*)^{1-\alpha} &= \frac{\beta / (1 + \beta) (1 - \alpha)}{(1 + n) (1 + g)} \\ \hat{k}^* &= \left[\frac{\beta / (1 + \beta) (1 - \alpha)}{(1 + n) (1 + g)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

W modelu Solowa:

$$\hat{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Czy możemy coś powiedzieć o stopie oszczędności i deprecjacji w tej gospodarce?

Stopa oszczędności / inwestycji

W najprostszym modelu OLG deprecjacja kapitału jest całkowita ($\delta = 1$):

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t = I_t = S_t$$

Poziom oszczędności i stopa oszczędności:

$$S_t = N_t^y a_{t+1} = L_t \frac{\beta}{1 + \beta} w_t = L_t \frac{\beta}{1 + \beta} (1 - \alpha) K_t^\alpha A_t^{1-\alpha} L_t^{-\alpha} = \frac{\beta}{1 + \beta} (1 - \alpha) Y_t$$

$$s \equiv \frac{S_t}{Y_t} = \frac{\beta}{1 + \beta} (1 - \alpha)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = (1 - \alpha) \frac{(1 + \beta) - \beta}{(1 + \beta)^2} = \frac{1 - \alpha}{(1 + \beta)^2} > 0$$

Im bardziej cierpliwe są gospodarstwa domowe (wyższa β),
tym wyższa jest stopa oszczędności / inwestycji s

Złota reguła i dynamiczna nieefektywność

W modelu OLG też istnieje poziom stopy oszczędności maksymalizujący konsumpcję (na efektywną jednostkę pracy) na ścieżce zrównoważonego wzrostu:

$$\begin{aligned}\hat{c}^* &= (C/(AL))^* = (Y/(AL))^* - (I/(AL))^* = (\hat{k}^*)^\alpha - (1+n)(1+g)\hat{k}^* \\ \frac{\partial \hat{c}^*}{\partial \hat{k}^*} &= \alpha(\hat{k}^*)^{\alpha-1} - (1+n)(1+g) = 0 \\ \hat{k}_{GR}^* &= \left[\frac{\alpha}{(1+n)(1+g)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Dla funkcji Cobba-Douglasa ponownie otrzymujemy rezultat $s_{GR} = \alpha$
Aby gospodarka OLG była dynamicznie nieefektywna, wystarczy, że:

$$s = \frac{\beta}{1+\beta} (1-\alpha) > \alpha \quad \rightarrow \quad \beta > \frac{\alpha}{1-2\alpha}$$

Dla np. $\alpha = 0.3$ wystarczy, że $\beta > 0.75$, co jest możliwe dla „cierpliwych” krajów

Kryteria dynamicznej nieefektywności

Dynamiczną nieefektywność można też wykryć korzystając z kryterium:

$$(1 + r) < (1 + n)(1 + g)$$

Czyli realna stopa zwrotu z kapitału < stopa wzrostu zagregowanego realnego PKB

Dla funkcji Cobba-Douglasa i $\delta = 1$:

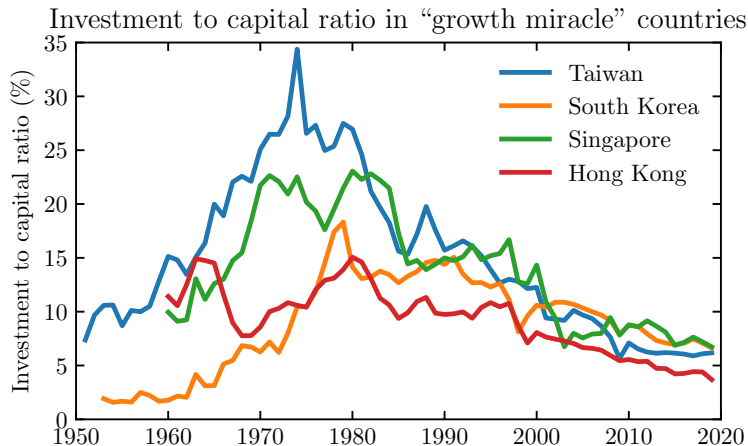
$$1 + r = 1 + \alpha \hat{k}^{\alpha-1} - \delta < (1 + n)(1 + g)$$

$$\frac{\alpha}{(1 + n)(1 + g)} < \hat{k}^{1-\alpha}$$

$$\hat{k} > \left[\frac{\alpha}{(1 + n)(1 + g)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \hat{k}_{GR}^*$$

Kryteria dynamicznej nieefektywności

Abel et al. (1989): gospodarki z $r^K = \partial Y / \partial K < I / K$ są dynamicznie nieefektywne



Oczekiwana długość życia a oszczędności

Konsument dożywa do emerytury z prawdopodobieństwem ω :

$$\max_{c_t^y, c_{t+1}^o, a_t} U = \ln c_t^y + \omega\beta \ln c_{t+1}^o$$

$$\text{pod warunkami } c_t^y + a_{t+1} = w_t$$

$$c_{t+1}^o = (1 + r_{t+1}) a_{t+1}$$

Lagranżjan:

$$\mathcal{L} = \ln c_t^y + \omega\beta \ln c_{t+1}^o + \lambda \left[w_t - c_t^y - \frac{c_{t+1}^o}{1 + r_{t+1}} \right]$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$c_t^y : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^y} = \frac{1}{c_t^y} - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{c_t^y}$$

$$c_{t+1}^o : \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}^o} = \omega\beta \frac{1}{c_{t+1}^o} - \frac{\lambda}{1 + r_{t+1}} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \omega\beta (1 + r_{t+1}) \frac{1}{c_{t+1}^o}$$

Oczekiwana długość życia a oszczędności

Warunek optymalności (równanie Eulera):

$$\frac{1}{c_t^y} = \omega\beta (1 + r_{t+1}) \frac{1}{c_{t+1}^o} \rightarrow c_{t+1}^o = \omega\beta (1 + r_{t+1}) c_t^y$$

Optymalne wartości konsumpcji i aktywów:

$$c_t^y = \frac{1}{1 + \omega\beta} w_t, \quad c_{t+1}^o = \frac{\omega\beta}{1 + \omega\beta} (1 + r_{t+1}) w_t \quad \text{oraz} \quad a_{t+1} = \frac{\omega\beta}{1 + \omega\beta} w_t$$

Stopa oszczędności w równowadze:

$$s = (1 - \alpha) \frac{\omega\beta}{1 + \omega\beta}, \quad \frac{\partial s}{\partial \omega} > 0$$

Wyższa oczekiwana długość życia zwiększa stopę oszczędności

Oczekiwana długość życia a stopa oszczędności: dane

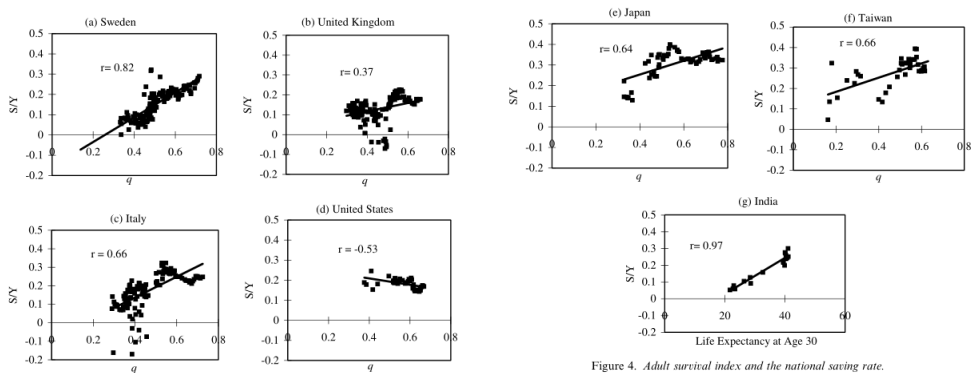
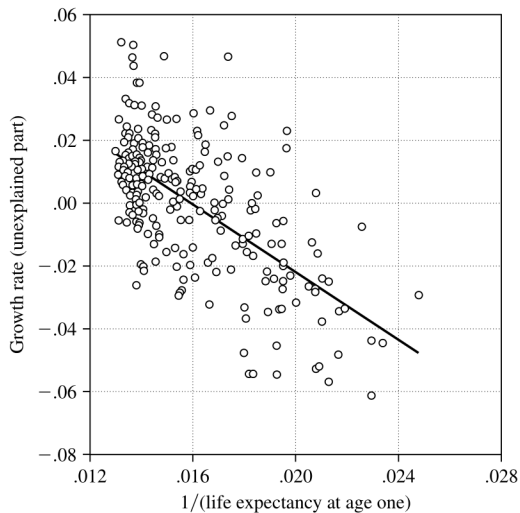


Figure 4. Adult survival index and the national saving rate.

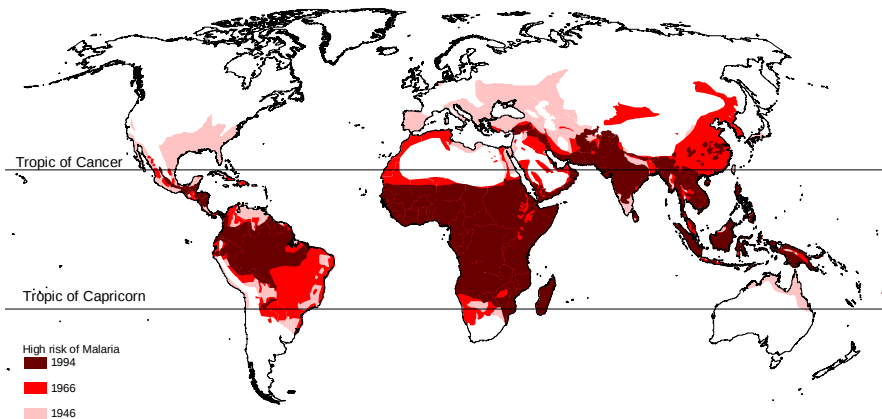
Kinugasa i Mason (2007)

Oczekiwana długość życia a tempo wzrostu gospodarczego



Geograficzny rozkład ryzyka malarii

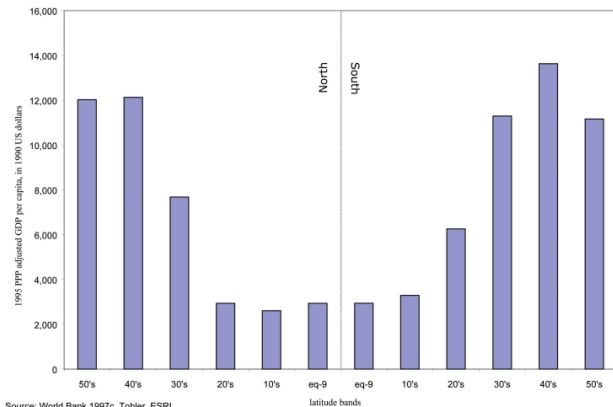
Figure 5.
Malaria risk - 1946, 1966, 1994



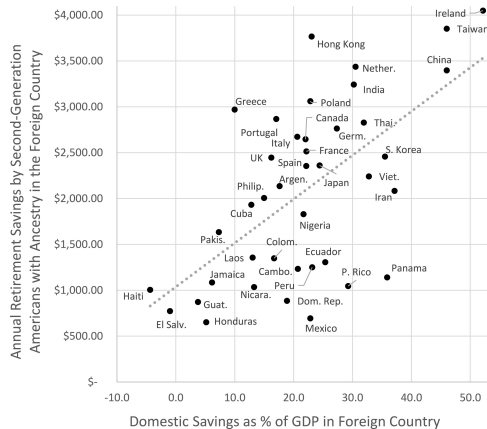
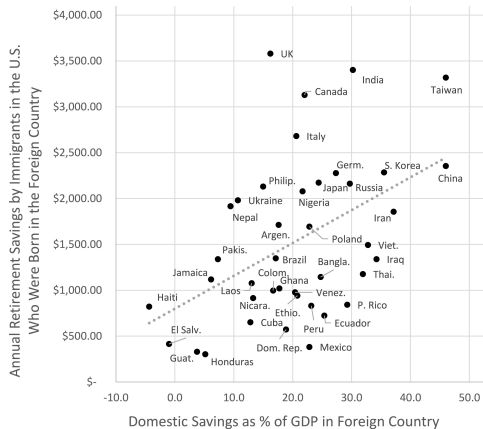
Gallup, Sachs, Mellinger (1999)

Szerokość geograficzna a PKB na osobę

Figure 2. GDP per capita by Latitude



Czynniki kulturowe a roczne oszczędności emerytalne



Richwine (2023)

System emerytalny

Rząd zbiera składki emerytalne τ_t od „młodych” i wypłaca emerytury p_t „starym”

Zmodyfikowane ograniczenia budżetowe:

$$c_t^y + a_{t+1} = w_t - \tau_t$$

$$c_{t+1}^o = (1 + r_{t+1}) a_{t+1} + p_{t+1}$$

Rozważymy dwa systemy, które różnią się związkiem między τ a p :

- Ufundowany: składki „młodych” są inwestowane na rynkach finansowych i będzie z nich wypłacana emerytura obecnym „młodym” gdy będą „starzy”
- Repartycyjny: składki „młodych” finansują emerytury obecnych „starych”

Emerytura zależy od składek i stopy zwrotu z aktywów:

$$p_{t+1} = (1 + r_{t+1}) \tau_t$$

Zmodyfikowane ograniczenia budżetowe:

$$c_t^y + a_{t+1} = w_t - \tau_t$$

$$c_{t+1}^o = (1 + r_{t+1}) a_{t+1} + (1 + r_{t+1}) \tau_t$$

Międzyokresowe ograniczenie budżetowe:

$$c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{1 + r_{t+1}} = w_t - \tau_t + \frac{(1 + r_{t+1}) \tau_t}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

jest takie samo, jak przy braku systemu emerytalnego

System emerytalny zmusza do „przymusowych oszczędności”, co można w pełni skompensować zmianą oszczędności prywatnych (przy braku innych ograniczeń)

Nie zmienia się też równanie Eulera:

$$c_{t+1}^o = \beta (1 + r_{t+1}) c_t^y$$

Poziom konsumpcji jest taki sam, jak przy braku systemu emerytalnego:

$$c_t^y = \frac{1}{1 + \beta} w_t$$

Aktywa prywatne są niższe o wysokość składek emerytalnych:

$$a_{t+1} = w_t - \tau_t - c_t^y = \frac{\beta}{1 + \beta} w_t - \tau_t$$

Kapitał w następnym okresie jest sumą aktywów prywatnych i emerytalnych:

$$K_{t+1} = N_t^y (a_{t+1} + \tau_t) = N_t^y \frac{\beta}{1 + \beta} w_t$$

System ufundowany nie wpływa na równowagę (w najprostszym modelu)

Rząd zbiera składki emerytalne „młodych” i wypłaca emerytury „starym”

Dla uproszczenia przyjmiemy, że system emerytalny jest zbilansowany:

$$N_t^o p_t = N_t^y \tau_t$$

$$p_t = (1 + n) \tau_t$$

$$p_{t+1} = (1 + n) \tau_{t+1}$$

Przyjmiemy, że składki rosną w tempie postępu technologicznego (tak jak płace):

$$\tau_{t+1} = (1 + g) \tau_t$$

Zmodyfikowane ograniczenia budżetowe:

$$c_t^y + a_{t+1} = w_t - \tau_t$$

$$c_{t+1}^o = (1 + r_{t+1}) a_{t+1} + (1 + n) (1 + g) \tau_t$$

Międzyokresowe ograniczenie budżetowe:

$$c_t^y + \frac{c_{t+1}^o}{1 + r_{t+1}} = w_t - \tau_t + \frac{(1 + n)(1 + g)}{1 + r_{t+1}} \tau_t = w_t + \left[\frac{(1 + n)(1 + g)}{1 + r_{t+1}} - 1 \right] \tau_t$$

Życiowy dochód do dyspozycji jest wyższy dzięki systemowi repartyjnemu, jeśli:

$$(1 + n)(1 + g) > (1 + r_{t+1})$$

Równanie Eulera nadal się nie zmienia:

$$c_{t+1}^o = \beta (1 + r_{t+1}) c_t^y$$

Ale tym razem system emerytalny wpływa na poziom konsumpcji:

$$c_t^y = \frac{1}{1 + \beta} \left[w_t + \left[\frac{(1 + n)(1 + g)}{1 + r_{t+1}} - 1 \right] \tau_t \right]$$

Zmienia się też poziom aktywów prywatnych:

$$a_{t+1} = w_t - \tau_t - c_t^y = \frac{\beta}{1+\beta} (w_t - \tau_t) - \frac{1}{1+\beta} \frac{(1+n)(1+g)}{1+r_{t+1}} \tau_t$$

Zagregowany kapitał jest niższy niż przy braku systemu emerytalnego:

$$K_{t+1} = N_t^y \left[\frac{\beta}{1+\beta} (w_t - \tau_t) - \frac{1}{1+\beta} \frac{(1+n)(1+g)}{1+r_{t+1}} \tau_t \right]$$

System repartycyjny zwiększa dobrobyt, jeśli gospodarstwa domowe oszczędzają „za dużo” (początkowo mamy dynamiczną nieefektywność)

W większości krajów rozwiniętych działa obecnie system repartycyjny, choć nie są one dynamicznie nieefektywne. Co więcej, ponieważ zazwyczaj

$$(1 + r) > (1 + n)(1 + g)$$

to system repartycyjny obniża konsumpcję i dobrobyt

Są inne korzyści z systemu emerytalnego, niewystępujące w prostym modelu:

- Ubezpieczenie od „ryzyka” przeżycia prywatnych oszczędności
- „Zachęcenie” do oszczędzania gospodarstw domowych niespójnych w czasie
- (Potencjalnie) niwelowanie nierówności dochodowych

Te funkcje może spełniać także system ufundowany, ale bardzo trudno jest przejść z istniejącego systemu repartycyjnego do ufundowanego