



UNIwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Zaawansowana Makroekonomia

Wzrost gospodarczy: Wykład 1

Marcin Bielecki

Rok akademicki 2025/2026

Uniwersytet Warszawski
Wydział Nauk Ekonomicznych

Model Solowa-Swana

Autorzy: Robert Solow (1956, 1957) i Trevor Swan (1956)

Długookresowy wzrost PKB na osobę pochodzi z dwóch źródeł:

- Akumulacji kapitału (proces endogeniczny)
- Postępu technologicznego (proces egzogeniczny)

Niespodzianka Solowa: akumulacja kapitału nie jest w stanie podtrzymać wzrostu w długim terminie! Konieczny do tego jest postęp technologiczny

Bardzo dobry model mechaniczny, ale nie objaśnia fundamentalnych przyczyn wzrostu

Punkt wyjścia dla teorii wzrostu gospodarczego

Uproszczenia i założenia

Brak handlu międzynarodowego, gospodarka zamknięta ($NX = 0$)

Brak sektora rządowego ($G = T = 0$)

Doskonała konkurencja na rynkach dóbr i czynników produkcji

Doskonała informacja oraz brak efektów zewnętrznych

Homogeniczne dobro końcowe Y z ceną znormalizowaną do 1 w każdym okresie, produkowane według neoklasycznej funkcji produkcji

Wszystkie zmienne są wyrażone w kategoriach realnych

Dwa rodzaje reprezentatywnych decydentów:

- Gospodarstwa domowe
- Firmy

Gospodarstwa domowe są bezpośrednimi właścicielami czynników produkcji

Realne PKB Y jest produkowane według neoklasycznej funkcji produkcji F :

$$Y = F(K, L, A)$$

gdzie K to zasób kapitału, L to liczba pracowników, zaś A to poziom technologii.

W dalszej części wykładu rozpatrzymy wariant, w którym A będzie zmieniało się w czasie. Tymczasowo potraktujemy A jako stałą i będziemy zapisywać jako $\bar{A}$.

Neoklasyczna funkcja produkcji spełnia następujące założenia:

1. Stałe przychody skali (względem kapitału i pracy): $F(zK, zL, A) = zY$
2. Dodatnie i malejące krańcowe przychody z obu czynników produkcji (symetrycznie dla L): $\partial F / \partial K > 0$, $\partial^2 F / \partial K^2 < 0$
3. **Warunki Inady** (symetrycznie dla L):

$$F(0, L) = 0, \quad \lim_{K \rightarrow 0} \partial F / \partial K = \infty, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \partial F / \partial K = 0$$

Założenia te **gwarantują** istnienie jednoznacznego stanu ustalonego modelu

Popularne postaci funkcyjne

Będziemy się zazwyczaj posługiwać funkcją Cobba-Douglasa, gdzie $\alpha \in (0, 1)$:

$$Y = \bar{A} K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

Funkcja ta spełnia wszystkie założenia neoklasycznej funkcji produkcji

Inną często spotykaną w badaniach postacią funkcyjną jest funkcja o stałej elastyczności substytucji (constant elasticity of substitution, CES):

$$Y = \bar{A} [\alpha K^{\rho} + (1 - \alpha) L^{\rho}]^{1/\rho}$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$ oraz $\rho \leq 1$, przy czym $\lim_{\rho \rightarrow 0} (CES) = (CD)$

Uwaga: CES nie spełnia wszystkich założeń o neoklasycznej funkcji produkcji:

$F(0, L) \geq 0$ (to nie szkodzi), ale dla $\rho > 0$ nie są spełnione pozostałe warunki Inady, a zatem stan ustalony może nie istnieć

Sektor gospodarstw domowych

Ponieważ $NX = G = T = 0$, nasze równania na PKB upraszczają się:

$$Y = C + I$$

$$Y = wL + r_K K + \Pi$$

Gospodarstwa domowe to, co zarobią, mogą przeznaczyć albo na konsumpcję C , albo na zwiększenie zasobu swoich aktywów poprzez strumień oszczędności S :

$$Y = C + S = C + I \quad \rightarrow \quad I = S$$

W gospodarce zamkniętej inwestycje I i oszczędności S są sobie zawsze równe

Uwaga: to nie znaczy, że oszczędności „powodują” inwestycje lub vice versa!

Model Solowa zakłada, że oszczędności / inwestycje są stałą częścią s dochodu:

$$I = S = sY \quad \rightarrow \quad C = (1 - s)Y$$

Dynamika populacji oraz postać intensywna funkcji produkcji

Liczba ludności N zmienia się w czasie w tempie n : $N_{t+1} = (1 + n) N_t$

Liczba pracowników jest proporcjonalna do liczby ludności
i zmienia się w tym samym tempie:

$$L_t \propto N_t \quad \rightarrow \quad \frac{L_{t+1}}{L_t} = \frac{N_{t+1}}{N_t} = (1 + n)$$

Od tej pory będą nas głównie interesować zmienne na pracownika:

$$k \equiv K/L, \quad y \equiv Y/L, \quad c \equiv C/L$$

Ponieważ funkcja produkcji cechuje się stałymi przychodami skali,
można ją łatwo zapisać w postaci intensywnej (na pracownika):

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K, L, \bar{A})}{L} = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}, \bar{A}\right) = F(k, 1, \bar{A}) \equiv f(k)$$

Własności funkcji produkcji w postaci intensywnej

Funkcja produkcji w postaci intensywnej spełnia następujące własności:

$$f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \quad \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$$

$$f(k) - kf'(k) > 0$$

Na przykładzie funkcji Cobba-Douglasa:

$$F(K, L, \bar{A}) = \bar{A}K^\alpha L^{1-\alpha}$$

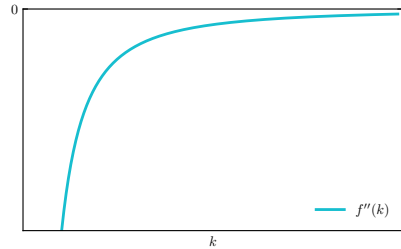
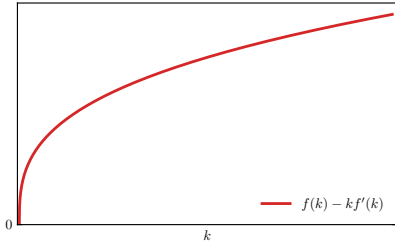
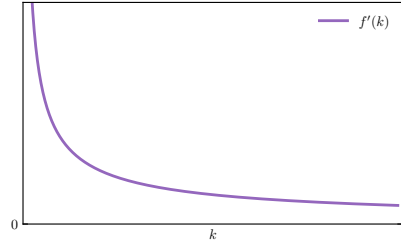
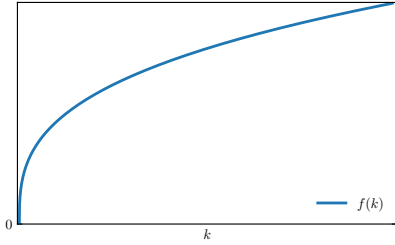
$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K, L, \bar{A})}{L} = \frac{\bar{A}K^\alpha L^{1-\alpha}}{L^\alpha L^{1-\alpha}} = \bar{A} \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = \bar{A}k^\alpha$$

$$f(k) = F(k, 1, \bar{A}) = \bar{A}k^\alpha$$

$$f'(k) = \bar{A}\alpha k^{\alpha-1} > 0$$

$$f''(k) = \bar{A}\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2} < 0$$

$$f(k) - kf'(k) = \bar{A}k^\alpha - \bar{A}\alpha k^\alpha > 0$$



Trzy kluczowe składowe modelu Solowa

1. Równanie akumulacji kapitału (tożsamość księgowa):

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t$$

gdzie δ to stopa deprecjacji kapitału

2. Stała stopa oszczędności / inwestycji (założenie behawioralne):

$$I_t = S_t = sY_t$$

3. Funkcja produkcji jest neoklasyczna (założenie pewnych własności funkcji produkcji):

$$Y_t = F(K_t, L_t, A)$$

$$y_t = f(k_t)$$

Fundamentalne równanie modelu Solowa

Zaczynamy od równania akumulacji kapitału i używamy założeń modelu:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t$$

$$K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta) K_t \quad | \quad : L_t$$

$$\frac{K_{t+1}}{L_t} = s \frac{Y_t}{L_t} + (1 - \delta) \frac{K_t}{L_t}$$

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} \cdot \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = s y_t + (1 - \delta) k_t$$

$$(1 + n) k_{t+1} = s f(k_t) + (1 - \delta) k_t$$

Otrzymujemy fundamentalne równanie modelu Solowa, opisujące dynamikę kapitału na pracownika k w czasie jako funkcję samego k i parametrów modelu:

$$k_{t+1} = \frac{s f(k_t) + (1 - \delta) k_t}{1 + n}$$

Stanu ustalony dla funkcji Cobba-Douglasa

Fundamentalne równanie dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa:

$$(1 + n) k_{t+1} = s\bar{A}k_t^\alpha + (1 - \delta) k_t$$

W stanie ustalonym:

$$\begin{array}{lcl} (1 + n) k = s\bar{A}k^\alpha + (1 - \delta) k & | & - (1 - \delta) k \\ (\delta + n) k = s\bar{A}k^\alpha & | & : (\delta + n) \quad : k^\alpha \\ k^{1-\alpha} = \frac{s\bar{A}}{\delta + n} \end{array}$$

Kapitał na pracownika w stanie ustalonym:

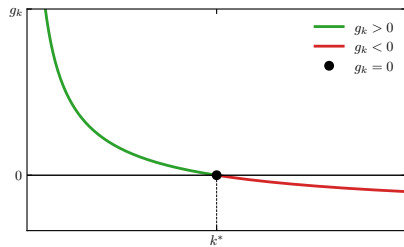
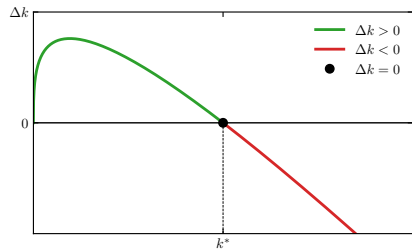
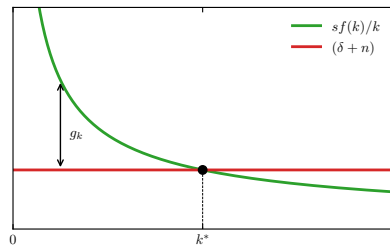
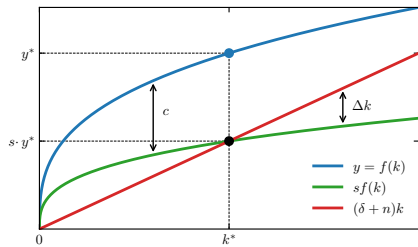
$$k^* = \left(\frac{s\bar{A}}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

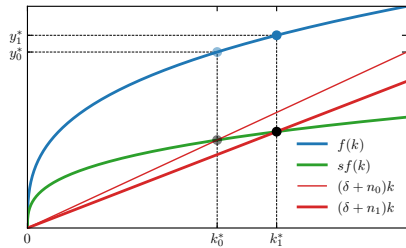
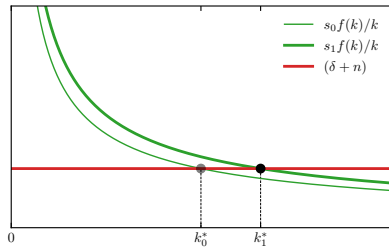
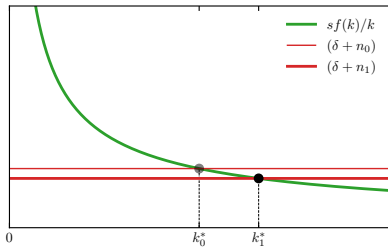
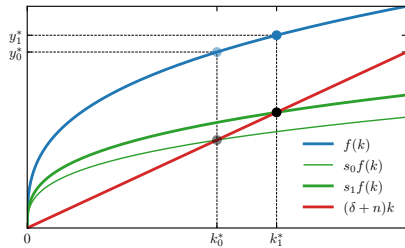
Fundamentalne równanie można zapisać w postaci zmiany, lub **tempa zmiany** k :

$$\Delta k_{t+1} \equiv k_{t+1} - k_t = \frac{sf(k_t) - (\delta + n)k_t}{1 + n} \simeq sf(k_t) - (\delta + n)k_t$$
$$g_k \equiv \frac{\Delta k_{t+1}}{k_t} \simeq s \frac{f(k_t)}{k_t} - (\delta + n)$$

Tempo to zależy ujemnie od k oraz osiąga 0 dla poziomu k^* w **stanie ustalonym**:

$$g_k^* = 0 = s \frac{f(k^*)}{k^*} - (\delta + n)$$
$$(\delta + n) = s \frac{f(k^*)}{k^*}$$
$$\frac{k^*}{f(k^*)} = \frac{s}{\delta + n}$$



$n_0 \searrow n_1$

 $s_0 \nearrow s_1$


Zmienne na pracownika w stanie ustalonym (dla funkcji Cobba-Douglasa):

$$k^* = \left(\frac{s\bar{A}}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

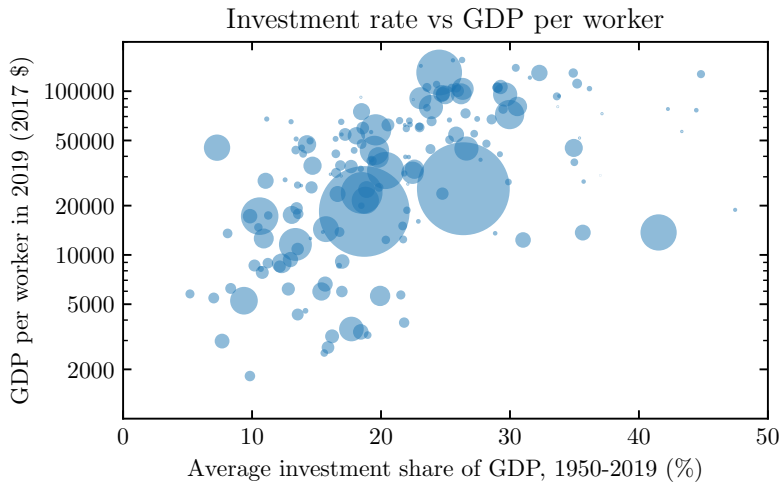
$$y^* = f(k^*) = \bar{A}(k^*)^\alpha = \bar{A} \left(\frac{s\bar{A}}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$c^* = (1 - s)y^* = (1 - s)\bar{A} \left(\frac{s\bar{A}}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

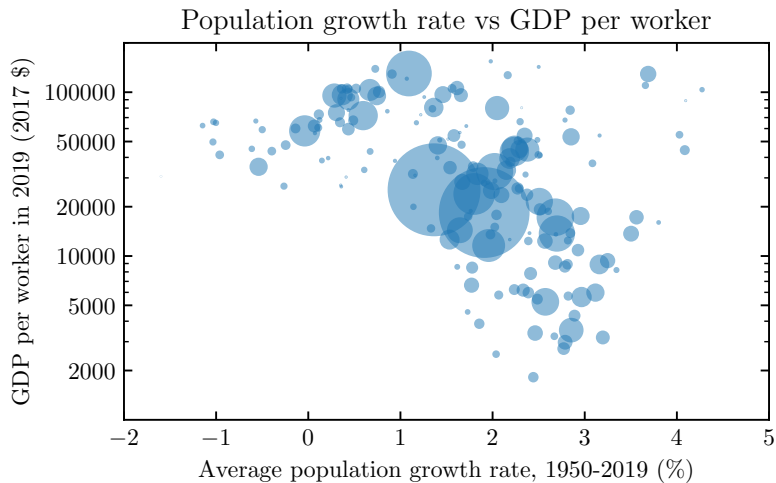
Model przewiduje, że PKB na pracownika będzie wyższe w krajach o:

- Wyższym poziomie zaawansowania technologicznego $\bar{A}$
- Wyższej stopie oszczędności / inwestycji s
- Niższej stopie deprecjacji kapitału δ
- Niższym tempie wzrostu populacji n

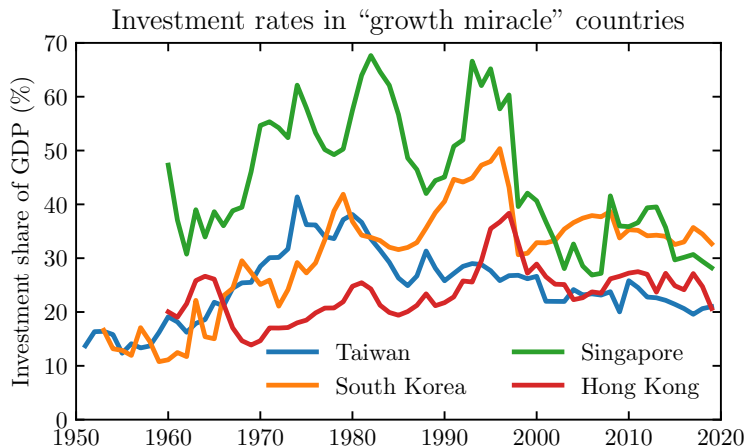
Udział inwestycji w PKB a PKB na pracownika



Tempo zmian populacji a PKB na pracownika



Udział inwestycji w PKB u „azjatyckich tygrysów”



Złota reguła stopy inwestycji (golden rule, GR)

Stopa inwestycji ma niejednoznaczny wpływ na poziom konsumpcji

$$c^* = (1 - s) y^* = (1 - s) \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Istnieje taki poziom s , który maksymalizuje konsumpcję w stanie ustalonym, łatwiej jest jednak najpierw znaleźć poziom k odpowiadający takiej sytuacji

W stanie ustalonym z definicji inwestycje równają się efektywnej deprecjacji:

$$s \bar{A}(k^*)^\alpha = (\delta + n) k^*$$

$$c^* = (1 - s) \bar{A}(k^*)^\alpha = \bar{A}(k^*)^\alpha - (\delta + n) k^*$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = \bar{A} \cdot \alpha (k^*)^{\alpha-1} - (\delta + n) = 0 \quad \rightarrow \quad k_{GR}^* = \left(\frac{\alpha \bar{A}}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \rightarrow \quad s_{GR} = \alpha$$

Dla dowolnej neoklasycznej funkcji produkcji $s_{GR} = [f'(k^*)k^*]/f(k^*)$

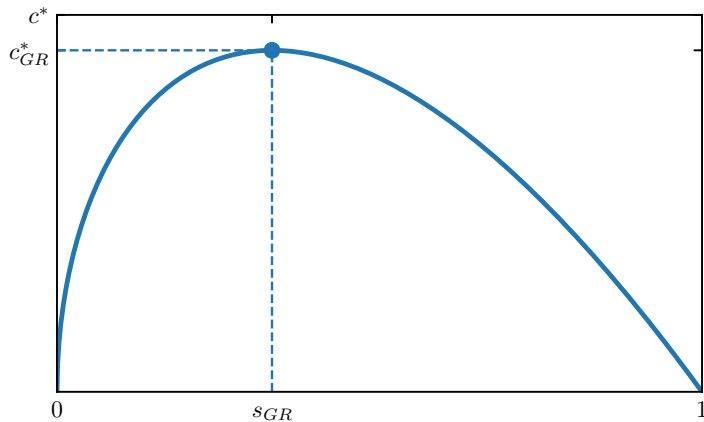
Dynamiczna nieefektywność w modelu Solowa

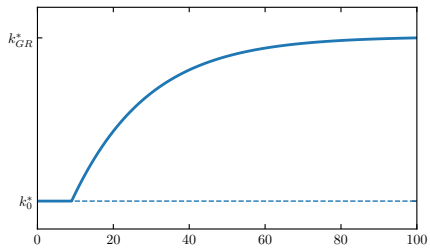
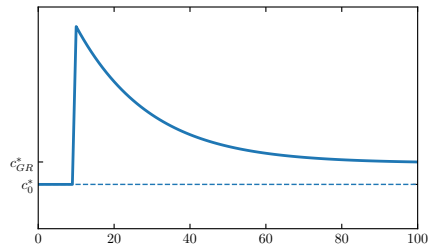
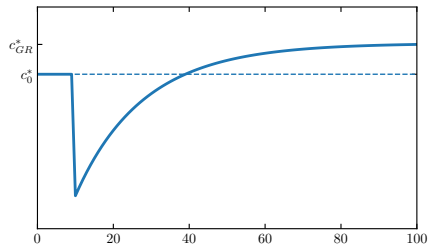
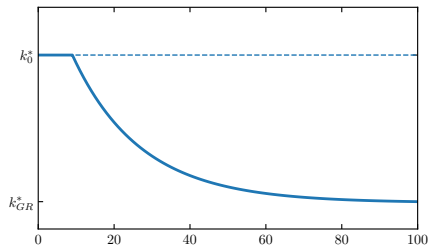
Ponieważ stopa oszczędności / inwestycji s jest egzogeniczna, nie ma powodu, żeby była ona akurat równa s_{GR}

Mamy do czynienia z dwiema możliwymi sytuacjami:

- Dynamiczna efektywność: jeśli $s < s_{GR}$ ($k^* < k_{GR}^*$), to podwyższenie s w stronę s_{GR} spowoduje spadek konsumpcji w krótkim okresie i wzrost konsumpcji powyżej początkowego poziomu w długim okresie
- Dynamiczna nieefektywność: jeśli $s > s_{GR}$ ($k^* > k_{GR}^*$), to obniżenie s w stronę s_{GR} spowoduje wzrost konsumpcji zarówno w krótkim, jak i w długim okresie!

Konsumpcja w stanie ustalonym a stopa oszczędności / inwestycji



$s \nearrow s_{GR}$

 $s \searrow s_{GR}$


Tempo wzrostu PKB na pracownika

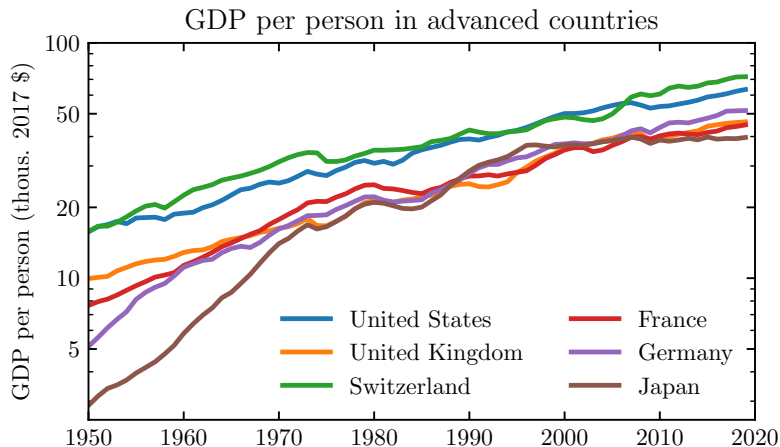
Wiemy już, że w stanie ustalonym (z definicji) tempo wzrostu zmiennych na pracownika wynosi 0. Poza stanem ustalonym:

$$\begin{aligned}g_y &\simeq \ln(1 + g_y) = \ln\left(1 + \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t}\right) = \ln\left(\frac{y_{t+1}}{y_t}\right) = \ln y_{t+1} - \ln y_t \\&= \ln(Ak_{t+1}^\alpha) - \ln(Ak_t^\alpha) = \ln A + \alpha \ln k_{t+1} - (\ln A + \alpha \ln k_t) \\&= \alpha (\ln k_{t+1} - \ln k_t) = \alpha \ln\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right) \simeq \alpha g_k \\g_y &\simeq \alpha (sAk_t^{\alpha-1} - (\delta + n))\end{aligned}$$

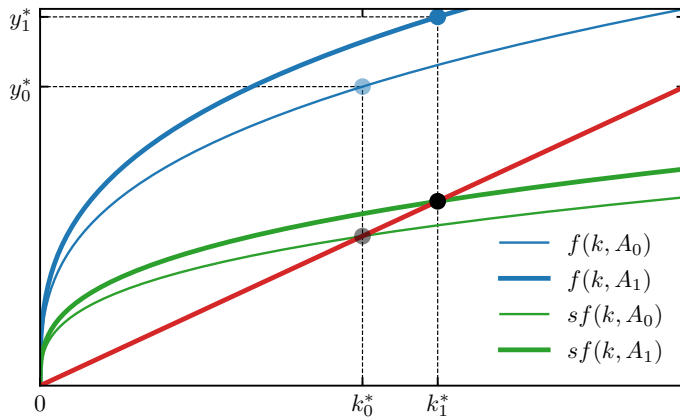
Oznacza to, że przesunięcie s na wyższy poziom, lub n na niższy poziom, **tymczasowo** zwiększa tempo wzrostu gospodarczego

Nie jest jednak możliwe utrzymanie dodatniego tempa wzrostu gospodarczego w długim okresie bez postępu technologicznego

Co sprawia, że kraje rozwinięte nadal rosną?



Efekt jednorazowego wzrostu technologii



Trwały postęp technologiczny

Ścieżka zrównoważonego wzrostu

Ścieżką zrównoważonego wzrostu (balanced growth path) nazywamy sytuację, w której wszystkie zmienne rosną w stałym (potencjalnie różniącym się od siebie) tempie

Konsekwencje równania akumulacji kapitału:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t \quad \rightarrow \quad \Delta K_{t+1} = I_t - \delta K_t$$

dla gospodarki zamkniętej bez sektora rządowego ($Y = C + I$) są następujące:

1. Jeśli gospodarka znajduje się na ścieżce zrównoważonego wzrostu, to $g_Y = g_K = g_I = g_C$, a K/Y , I/Y i C/Y są stałe
2. Jeśli K/Y i I/Y są stałe, to gospodarka znajduje się na ścieżce zrównoważonego wzrostu, cechującej się $g_Y = g_K = g_I = g_C$:

$$g_K \equiv \frac{\Delta K}{K} = \frac{I}{K} - \delta$$

Postać funkcji produkcji

Postęp technologiczny może co do zasady przyjmować różne formy:

- Zwiększając produktywność wszystkich czynników: $Y = A_F \cdot F(K, L)$
- Zwiększając bezpośrednio produktywność kapitału: $Y = F(A_K \cdot K, L)$
- Zwiększając bezpośrednio produktywność pracy: $Y = F(K, A_L \cdot L)$

Postęp technologiczny może też oczywiście być kombinacją wszystkich powyższych form:

$$Y = A_F \cdot F(A_K \cdot K, A_L \cdot L)$$

Twierdzenie Uzawy gwarantuje, że jeśli gospodarka znajduje się na ścieżce zrównoważonego wzrostu, to funkcję produkcji można zapisać w postaci:

$$Y = F(K, AL)$$

Uwaga: to tylko gwarancja możliwości konkretnego zapisu formy funkcyjnej, a nie rezultat o „prawdziwej” naturze postępu technologicznego!

Model Solowa z postępem technologicznym

Od teraz zakładamy, że poziom technologii rośnie w tempie g :

$$A_{t+1} = (1 + g) A_t$$

Funkcja produkcji z kolei przybierze postać:

$$Y = F(K, AL) \quad \text{lub w wariancie Cobba-Douglasa} \quad Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$$

Gospodarka teraz nie będzie osiągać stanu ustalonego, a **zbiegać do ścieżki zrównoważonego wzrostu z dodatnim tempem wzrostu PKB na pracownika**

Ponieważ od teraz zmienne na pracownika będą rosnąć z czasem, wprowadzamy nowe zmienne: PKB i kapitał na efektywne jednostki pracy:

$$\hat{y} \equiv \frac{Y}{AL}, \quad \hat{k} \equiv \frac{K}{AL}$$

Funkcja produkcji w postaci intensywnej (na efektywne jednostki pracy)

Dla dowolnej neoklasycznej funkcji produkcji:

$$\hat{y} = \frac{Y}{AL} = \frac{F(K, AL)}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, \frac{AL}{AL}\right) = F(\hat{k}, 1) \equiv f(\hat{k})$$

Dla funkcji Cobba-Douglasa:

$$\hat{y} = \frac{Y}{AL} = \frac{K^\alpha (AL)^{1-\alpha}}{(AL)^\alpha (AL)^{1-\alpha}} = \left(\frac{K}{AL}\right)^\alpha = \hat{k}^\alpha$$

Fundamentalne równanie modelu Solowa z postępem technologicznym

Znowu zaczynamy od równania akumulacji kapitału i wykorzystujemy założenia:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t$$

$$K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta) K_t \quad | \quad : A_t L_t$$

$$\frac{K_{t+1}}{A_t L_t} = s \frac{Y_t}{A_t L_t} + (1 - \delta) \frac{K_t}{A_t L_t}$$

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} \cdot \frac{A_{t+1}}{A_t} \cdot \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} = s \hat{y}_t + (1 - \delta) \hat{k}_t$$

$$(1 + n)(1 + g) \hat{k}_{t+1} = s f(\hat{k}_t) + (1 - \delta) \hat{k}_t$$

Fundamentalne równanie modelu Solowa z postępem technologicznym:

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{s f(\hat{k}_t) + (1 - \delta) \hat{k}_t}{(1 + n)(1 + g)}$$

Dynamika i ścieżka zrównoważonego wzrostu

Fundamentalne równanie można również zapisać w postaci tempa wzrostu $\hat{k}$:

$$\Delta \hat{k}_{t+1} \equiv \hat{k}_{t+1} - \hat{k}_t = \frac{sf(\hat{k}_t) - (\delta + n + g + ng) \hat{k}_t}{(1+n)(1+g)} \simeq sf(\hat{k}_t) - (\delta + n + g) \hat{k}_t$$
$$g_{\hat{k}} \equiv \frac{\Delta \hat{k}_{t+1}}{\hat{k}_t} \simeq s \frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t} - (\delta + n + g)$$

Dzięki funkcji Cobba-Douglasa łatwo uzyskamy równanie na tempo wzrostu $\hat{k}$:

$$g_{\hat{k}} = s \frac{\hat{k}^\alpha}{\hat{k}} - (\delta + n + g) = s \hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + n + g)$$

Tempo to jest równe 0 dla pewnego poziomu $\hat{k}^*$ na **ścieżce zrównoważonego wzrostu**

Dla funkcji Cobba-Douglasa kapitał na jednostkę efektywną pracy na ŚZW wynosi:

$$s \hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + n + g) = 0$$

$$\hat{k}^{\alpha-1} = \frac{\delta + n + g}{s} \quad \rightarrow \quad \hat{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ścieżka zrównoważonego wzrostu: poziomych zmiennych

Zmienne na efektywne jednostki pracy na ścieżce zrównoważonego wzrostu:

$$\hat{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{oraz} \quad \hat{y}^* = f(\hat{k}^*) = (\hat{k}^*)^\alpha = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Z kolei zmienne na pracownika mają następujący przebieg:

$$k_t^* = A_t \hat{k}^* = A_t \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y_t^* = A_t \hat{y}^* = A_t \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$c_t^* = (1 - s) y_t^* = (1 - s) A_t \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Ścieżka zrównoważonego wzrostu: tempa zmian

Zmienne na efektywne jednostki pracy rosną w tempie równym 0:

$$g_{\hat{y}}^* = g_{\hat{k}}^* = 0$$

Zmienne na pracownika rosną w tym samym tempie, równym g :

$$g_c^* = g_y^* = g_k^* \simeq \ln \left(\frac{k_{t+1}^*}{k_t^*} \right) = \ln \left(\frac{A_{t+1} \hat{k}^*}{A_t \hat{k}^*} \right) = \ln(1 + g) \simeq g$$

Zmienne zagregowane rosną w tym samym tempie, równym $g + n$:

$$g_C^* = g_I^* = g_Y^* = g_K^* \simeq \ln \left(\frac{A_{t+1} L_{t+1} \hat{k}^*}{A_t L_t \hat{k}^*} \right) = \ln \left(\frac{A_{t+1}}{A_t} \right) + \ln \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} \right) \simeq g + n$$

Poza ścieżką zrównoważonego wzrostu PKB na pracownika rośnie w tempie:

$$g_y \simeq \ln \left(\frac{A_{t+1} \hat{k}_{t+1}^\alpha}{A_t \hat{k}_t^\alpha} \right) = \ln \left(\frac{A_{t+1}}{A_t} \right) + \alpha \ln \left(\frac{\hat{k}_{t+1}}{\hat{k}_t} \right) \simeq g + \alpha g_{\hat{k}}$$

Sektor firm i wynagrodzenia czynników produkcji

Doskonale konkurencyjne firmy starają się zmaksymalizować zysk:

$$\max_{K, L} \quad \Pi = 1 \cdot K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha} - wL - r_K K$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial K} &= \alpha K^{\alpha-1} (AL)^{1-\alpha} - r_K = 0 & \rightarrow & \quad r_K = \alpha \hat{k}^{\alpha-1} & = \alpha \frac{Y}{K} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial L} &= (1-\alpha) K^{\alpha} A^{1-\alpha} L^{\alpha} - w = 0 & \rightarrow & \quad w = (1-\alpha) A \hat{k}^{\alpha} & = (1-\alpha) \frac{Y}{L} \end{aligned}$$

W warunkach doskonałej konkurencji oraz jeśli funkcja produkcji cechuje się stałymi przychodami skali, suma wynagrodzeń czynników produkcji równa jest PKB (w przeciwnym wypadku $\Pi > 0$ i jest dochodem niektórych gospodarstw domowych):

$$wL + r_K K = (1-\alpha) \frac{Y}{L} \cdot L + \alpha \frac{Y}{K} \cdot K = (1-\alpha) Y + \alpha Y = Y \quad \rightarrow \quad \Pi = 0$$

Udziały wynagrodzeń czynników produkcji

Udziały wynagrodzeń czynników produkcji w PKB dla funkcji Cobba-Douglasa:

$$\frac{wL}{Y} = \frac{(1 - \alpha) \frac{Y}{L} \cdot L}{Y} = (1 - \alpha) \quad \text{oraz} \quad \frac{r_K K + \Pi}{Y} = \frac{\alpha \frac{Y}{K} \cdot K + 0}{Y} = \alpha$$

Przy funkcji Cobba-Douglasa udziały wynagrodzeń pracy i kapitału w PKB są stałe

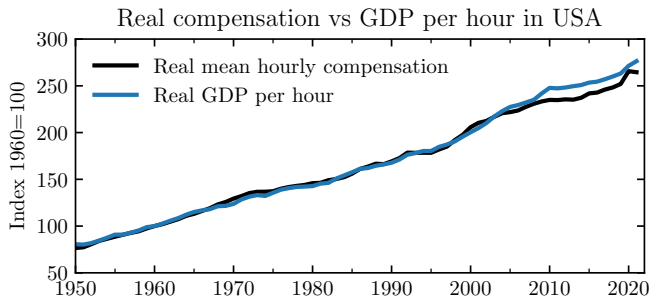
Typowe dla krajów rozwiniętych są wartości $\alpha \approx \frac{1}{3}$ oraz $(1 - \alpha) \approx \frac{2}{3}$

Ścieżka zrównoważonego wzrostu: wynagrodzenia czynników produkcji

Z rozwiązania problemu firm wiemy, że:

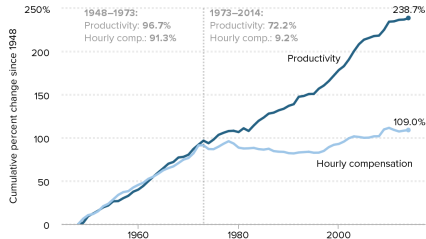
$$r_K^* = \alpha(\hat{k}^*)^{\alpha-1} \quad \text{oraz} \quad w^* = (1 - \alpha) A(\hat{k}^*)^\alpha$$

Oznacza to, że na ścieżce zrównoważonego wzrostu stopa zwrotu z kapitału jest stała, natomiast wynagrodzenia rosną w tym samym tempie co PKB:



Stagnacja medianowych wynagrodzeń w USA: wzrost nierówności płacowych

Disconnect between productivity and a typical worker's compensation, 1948–2014

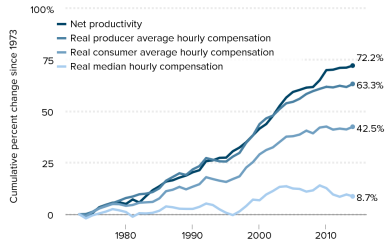


Note: Data are for average hourly compensation of production/nonsupervisory workers in the private sector and net productivity of the total economy. "Net productivity" is the growth of output of goods and services minus depreciation per hour worked.

Source: EPI analysis of data from the BEA and BLS (see technical appendix for more detailed information)

Economic Policy Institute

Growth of productivity, real average compensation (consumer and producer), and real median compensation, 1973–2014



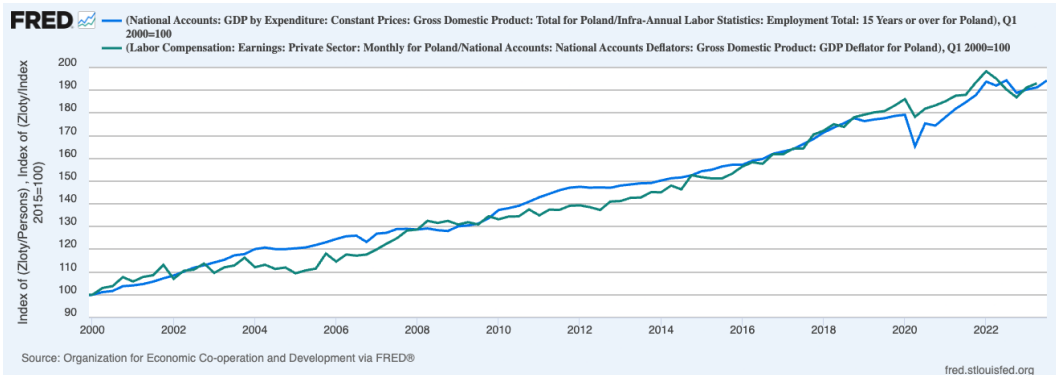
Note: Data are for all workers. Net productivity is the growth of output of goods and services minus depreciation, per hour worked.

Source: EPI analysis of data from the BEA, BLS, and CPS ORG (see technical appendix for more detailed information)

Economic Policy Institute

Bivens and Michel (2015)

Wzrost PKB na pracownika i realnego przeciętnego wynagrodzenia w Polsce



FRED, OECD

Mediana wynagrodzeń w **gospodarce narodowej** systematycznie stanowi ok. 82% przeciętnego wynagrodzenia w sektorze przedsiębiorstw:

X 2004: 1950,87 / 2368,52; **X 2008:** 2639,51 / 3232,07; **X 2024:** 6856,75 / 8363,69

Dekompozycja wzrostu a wynagrodzenia czynników produkcji

Czy wzrost napędza akumulacja K , czy postęp technologiczny? Dekompozycja wzrostu:

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha} \rightarrow g_Y = \alpha g_K + (1 - \alpha) g_A + (1 - \alpha) g_L$$
$$g_A = (g_Y - \alpha g_K - (1 - \alpha) g_L) / (1 - \alpha)$$

Young (1995): wzrost azjatyckich tygrysów to wyłącznie akumulacja kapitału, $g_A \approx 0$

Hsieh (1999, 2002): jeżeli Y , K , L są mierzone z błędem, do dekompozycji wzrostu lepiej użyć wynagrodzeń czynników produkcji: $g_A = g_w + \alpha / (1 - \alpha) g_{r_K}$

TABLE 2—COMPARISON OF GROWTH RATE OF REAL WAGES AND OUTPUT PER WORKER

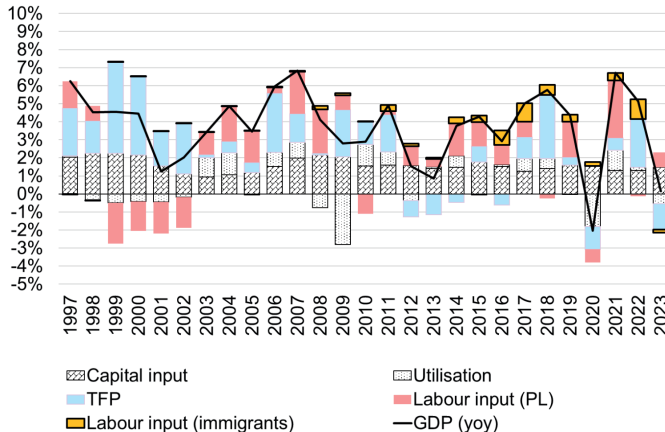
Average annual growth rate of:	Taiwan (1966–1990)	Singapore (1972–1990)	Hong Kong (1966–1991)	Korea (1966–1990)
Output per worker	4.30	4.20	4.70	4.90
Real wages	5.62	4.18	4.77	5.12

Notes: Growth rates of output per worker and real wages are not adjusted for quality. Growth rate of output per worker calculated from Young (1995), and real wages from the sources described in the Appendix.

Wniosek? Skoro $g_y \approx g_w$ **oraz** $g_{r_K} \approx 0$, to $g_y \approx g_A$ i kapitał jedynie „reagował” na wzrost A

„Klasyczna” dekompozycja wzrostu dla Polski

Figure 11. The decomposition of economic growth in Poland, with emphasis on the labour input of native workers and immigrants.

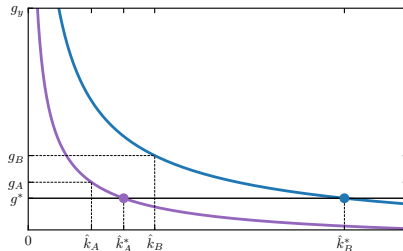
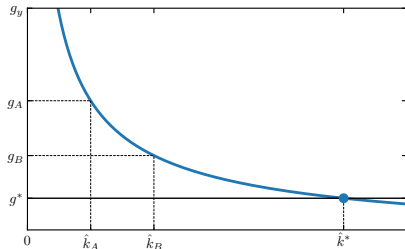


Konwergencja. Badania empiryczne

Konwergencja

Model Solowa przewiduje, że jeśli dwa kraje zmierzają do identycznego stanu ustalonego (ścieżki zrównoważonego wzrostu), kraj początkowo biedniejszy będzie miał wyższą stopę wzrostu gospodarczego

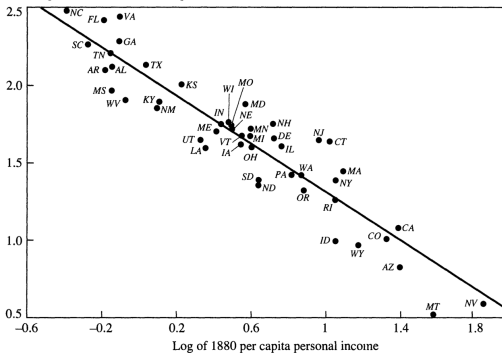
Jeżeli jednak kraje różnią się co do stanu ustalonego, kraj początkowo bogatszy i tak może rosnąć szybciej od biedniejszego (konwergencja warunkowa)



Konwergencję absolutną obserwujemy pomiędzy poszczególnymi stanami USA:

Figure 1. Convergence of Personal Income across U.S. States: 1880 Income and Income Growth from 1880 to 1988

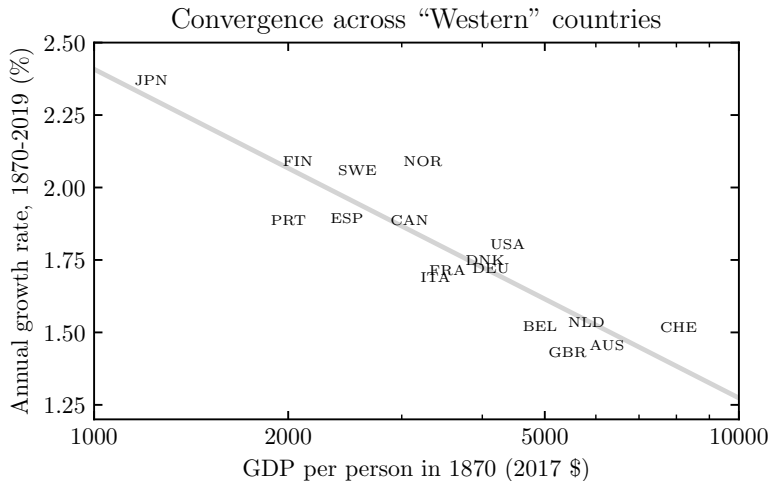
Annual growth rate, 1880–1988 (percent)



Sources: Bureau of Economic Analysis (1984), Easterlin (1960a, 1960b), and *Survey of Current Business*, various issues. The postal abbreviation for each state is used to plot the figure. Oklahoma, Alaska, and Hawaii are excluded from the analysis.

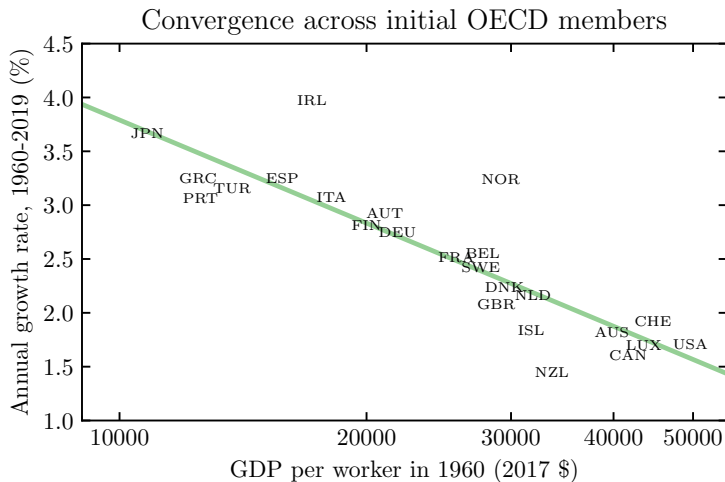
Konwergencja: kraje „zachodnie”

Konwergencję absolutną obserwujemy pomiędzy krajami „zachodnimi”:



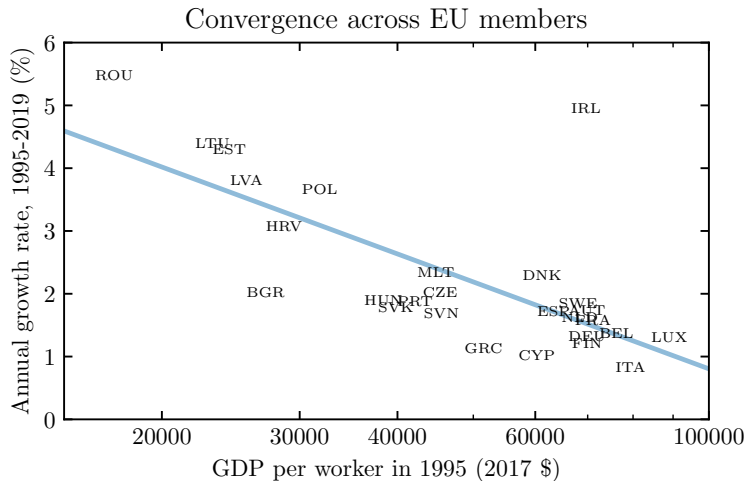
Konwergencja: kraje OECD

Konwergencję absolutną obserwujemy pomiędzy krajami-założycielami OECD:



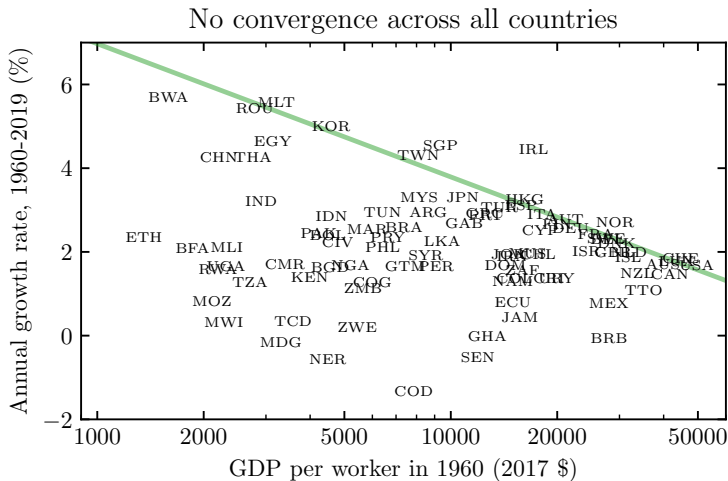
Konwergencja: kraje UE

Konwergencję absolutną obserwujemy pomiędzy członkami UE:



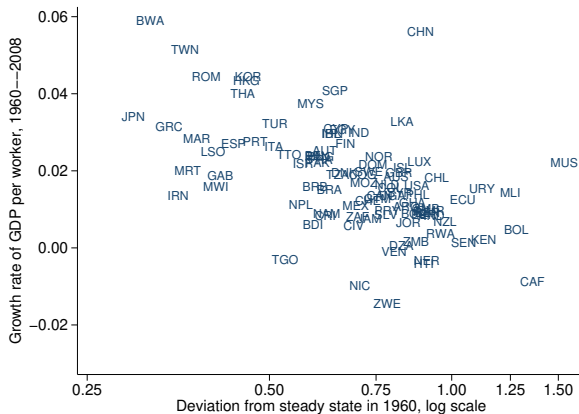
Konwergencja: warunkowa lub klubowa, ale nie absolutna

W pełnej próbie nie mamy do czynienia z konwergencją absolutną



Konwergencja warunkowa

Kraje rosną tym szybciej, im dalej są od swojego stanu ustalonego / ŚZW:



Jones and Vollrath (2013) *Introduction to Economic Growth*

PKB na pracownika na ścieżce zrównoważonego rozwoju:

$$y_t^* = A_t \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Po zlogarytmowaniu:

$$\ln y_t^* = \ln (A_0 \cdot e^{gt}) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln s - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln (\delta + n + g)$$

Model ekonometryczny:

$$\ln y_{it} = \underbrace{g \cdot t}_{\text{stała}} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln s_i - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln (\delta + n_i + g) + \underbrace{\ln A_{i0} + (\ln y_{it} - \ln y_{it}^*) + (g_i - g) t}_{\text{błąd oszacowania} \equiv \epsilon_i}$$

Wersja z restrykcją (restricted regression):

$$\ln y_{it} = gt + \frac{\alpha}{1-\alpha} [\ln s_i - \ln (\delta + n_i + g)] + \epsilon_i$$

MRW: oszacowanie podstawowego modelu

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	5.48 (1.59)	5.36 (1.55)	7.97 (2.48)
$\ln(I/GDP)$	1.42 (0.14)	1.31 (0.17)	0.50 (0.43)
$\ln(n + g + \delta)$	-1.97 (0.56)	-2.01 (0.53)	-0.76 (0.84)
$\bar{R}^2$	0.59	0.59	0.01
<i>s.e.e.</i>	0.69	0.61	0.38
Restricted regression:			
CONSTANT	6.87 (0.12)	7.10 (0.15)	8.62 (0.53)
$\ln(I/GDP) - \ln(n + g + \delta)$	1.48 (0.12)	1.43 (0.14)	0.56 (0.36)
$\bar{R}^2$	0.59	0.59	0.06
<i>s.e.e.</i>	0.69	0.61	0.37
Test of restriction:			
<i>p</i> -value	0.38	0.26	0.79
Implied α	0.60 (0.02)	0.59 (0.02)	0.36 (0.15)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05.

Tempo konwergencji

Z modelu można uzyskać związek pomiędzy odległością od ścieżki zrównoważonego rozwoju, a bieżącym tempem wzrostu:

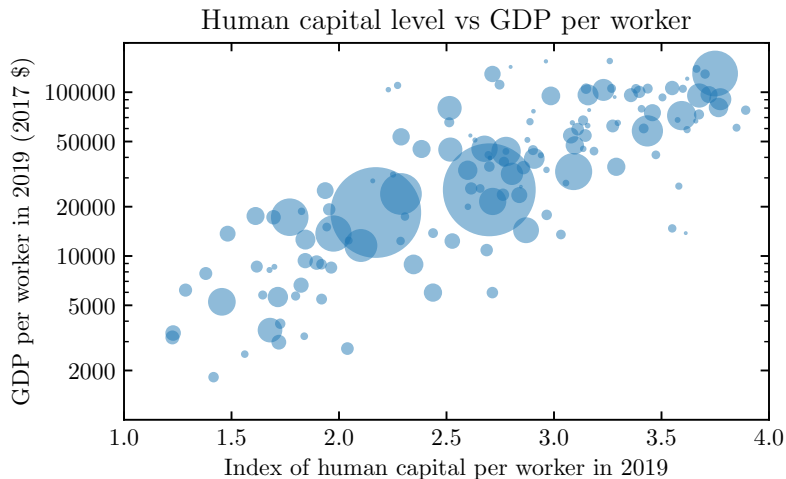
$$g_y \approx g + \underbrace{(1 - \alpha)(\delta + n + g)}_{\lambda} (\ln y^* - \ln y)$$

Badania ekonometryczne sugerują, że tempo konwergencji $\lambda \approx 0.02$, co oznacza, że krajom zajmuje ok. 35 lat pokonanie połowy dystansu do ich ŚZW

Dla wartości parametrów typowych dla krajów rozwiniętych: $\alpha = 0.33$, $\delta = 0.05$, $n = 0.01$, $g = 0.02$ model przewiduje $\lambda \approx 0.05$, czyli zbyt szybką konwergencję

Uwzględnienie kapitału ludzkiego w funkcji produkcji pozwala wygenerować realistyczne tempo konwergencji

Kapitał ludzki a PKB na pracownika



Funkcja produkcji rozszerzona o kapitał ludzki H :

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\beta (A_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$$

$$K_{t+1} = s_k Y_t + (1 - \delta) K_t$$

$$H_{t+1} = s_h Y_t + (1 - \delta) H_t$$

PKB na pracownika na ścieżce zrównoważonego wzrostu:

$$y_t^* = A_t \left(\frac{s_k^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} s_h^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{\delta + n + g} \right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

Model ekonometryczny:

$$\ln y_{it} = gt + \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \ln s_{k,i} + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \ln s_{h,i} \\ - \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta} \ln (\delta + n_i + g) + \epsilon_i$$

Wersja z restrykcją (restricted regression):

$$\ln y_{it} = gt + \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} [\ln s_{k,i} - \ln (\delta + n_i + g)] \\ + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} [\ln s_{h,i} - \ln (\delta + n_i + g)] + \epsilon_i$$

MRW: oszacowanie rozszerzonego modelu

Dependent variable: log GDP per working-age person in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	6.89 (1.17)	7.81 (1.19)	8.63 (2.19)
$\ln(I/GDP)$	0.69 (0.13)	0.70 (0.15)	0.28 (0.39)
$\ln(n + g + \delta)$	-1.73 (0.41)	-1.50 (0.40)	-1.07 (0.75)
$\ln(SCHOOL)$	0.66 (0.07)	0.73 (0.10)	0.76 (0.29)
$\bar{R}^2$	0.78	0.77	0.24
<i>s.e.e.</i>	0.51	0.45	0.33
Restricted regression:			
CONSTANT	7.86 (0.14)	7.97 (0.15)	8.71 (0.47)
$\ln(I/GDP) - \ln(n + g + \delta)$	0.73 (0.12)	0.71 (0.14)	0.29 (0.33)
$\ln(SCHOOL) - \ln(n + g + \delta)$	0.67 (0.07)	0.74 (0.09)	0.76 (0.28)
$\bar{R}^2$	0.78	0.77	0.28
<i>s.e.e.</i>	0.51	0.45	0.32
Test of restriction:			
<i>p</i> -value	0.41	0.89	0.97
Implied α	0.31 (0.04)	0.29 (0.05)	0.14 (0.15)
Implied β	0.28 (0.03)	0.30 (0.04)	0.37 (0.12)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05. SCHOOL is the average percentage of the working-age population in secondary school for the period 1960–1985.

Tempo konwergencji w modelu rozszerzonym

Równanie konwergencji w modelu rozszerzonym:

$$g_y \approx g + \underbrace{(1 - \alpha - \beta)(\delta + n + g)}_{\lambda} (\ln y_t^* - \ln y_t)$$

Po przekształceniu w model ekonometryczny:

$$\ln y_{iT} - \ln y_{i0} = (1 - e^{-\lambda T}) \left[\begin{array}{c} \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \ln s_{k,i} + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \ln s_{h,i} \\ - \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta} \log(\delta + n_i + g) \end{array} - \ln y_{i0} \right] + \epsilon_i$$

Wersja z restrykcją (restricted regression):

$$\ln y_{iT} - \ln y_{i0} = (1 - e^{-\lambda T}) \left[\begin{array}{c} \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} [\ln s_{k,i} - \log(\delta + n_i + g)] \\ + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} [\ln s_{h,i} - \log(\delta + n_i + g)] \end{array} - \ln y_{i0} \right] + \epsilon_i$$

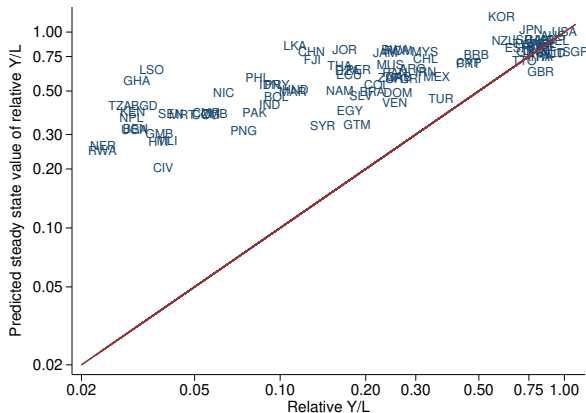
MRW: tempo konwergencji warunkowej

Dependent variable: log difference GDP per working-age person 1960–1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	2.46 (0.48)	3.09 (0.53)	3.55 (0.63)
$\ln(Y60)$	-0.299 (0.061)	-0.372 (0.067)	-0.402 (0.069)
$\ln(I/GDP) - \ln(n + g + \delta)$	0.500 (0.082)	0.506 (0.095)	0.396 (0.152)
$\ln(SCHOOL) - \ln(n + g + \delta)$	0.238 (0.060)	0.266 (0.080)	0.236 (0.141)
$\bar{R}^2$	0.46	0.44	0.66
<i>s.e.e.</i>	0.33	0.30	0.15
Test of restriction:			
<i>p</i> -value	0.40	0.42	0.47
Implied λ	0.0142 (0.0019)	0.0186 (0.0019)	0.0206 (0.0020)
Implied α	0.48 (0.07)	0.44 (0.07)	0.38 (0.13)
Implied β	0.23 (0.05)	0.23 (0.06)	0.23 (0.11)

Note. Standard errors are in parentheses. Y60 is GDP per working-age person in 1960. The investment and population growth rates are averages for the period 1960–1985. $(g + \delta)$ is assumed to be 0.05. SCHOOL is the average percentage of the working-age population in secondary school for the period 1960–1985.

Czy już „wyjaśniliśmy” wzrost? Niekoniecznie

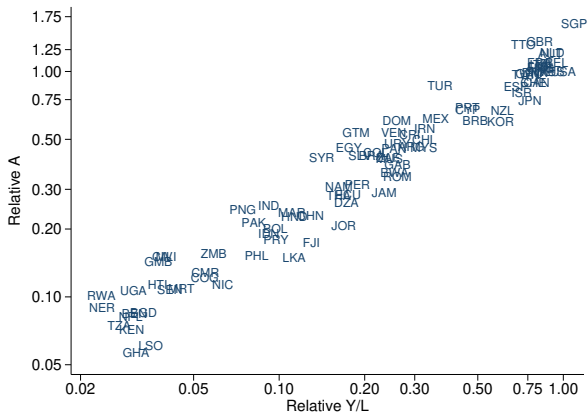
Kraje biedne są nadal biedniejsze, niż „powinny”:



Jones and Vollrath (2013) *Introduction to Economic Growth*

Kraje są zróżnicowane względem „technologii”

Występują ogromne różnice w technologii / produktywności pomiędzy krajami:



Jones and Vollrath (2013) *Introduction to Economic Growth*

Dekompozycja różnic w PKB na pracownika

Największe różnice biorą się z A oraz H/L , a nie z K/Y !

Country	Y/L	Contribution from		
		$(K/Y)^{\alpha/(1-\alpha)}$	H/L	A
United States	1.000	1.000	1.000	1.000
Canada	0.941	1.002	0.908	1.034
Italy	0.834	1.063	0.650	1.207
West Germany	0.818	1.118	0.802	0.912
France	0.818	1.091	0.666	1.126
United Kingdom	0.727	0.891	0.808	1.011
Hong Kong	0.608	0.741	0.735	1.115
Singapore	0.606	1.031	0.545	1.078
Japan	0.587	1.119	0.797	0.658
Mexico	0.433	0.868	0.538	0.926
Argentina	0.418	0.953	0.676	0.648
U.S.S.R.	0.417	1.231	0.724	0.468
India	0.086	0.709	0.454	0.267
China	0.060	0.891	0.632	0.106
Kenya	0.056	0.747	0.457	0.165
Zaire	0.033	0.499	0.408	0.160
Average, 127 countries:	0.296	0.853	0.565	0.516
Standard deviation:	0.268	0.234	0.168	0.325
Correlation with Y/L (logs)	1.000	0.624	0.798	0.889
Correlation with A (logs)	0.889	0.248	0.522	1.000

Hall and Jones (1999)

Why Do Some Countries Produce So Much More Output Per Worker Than Others?

Fundamentalne źródła wzrostu

W poszukiwaniu fundamentalnych źródeł wzrostu

Model Solowa dobrze opisuje „mechanikę” akumulacji czynników produkcji

Ale co wpływa na stopę inwestycji w kapitał fizyczny s_k i ludzki s_h ?

Co wpływa na tempo innowacji i adopcji nowych technologii?

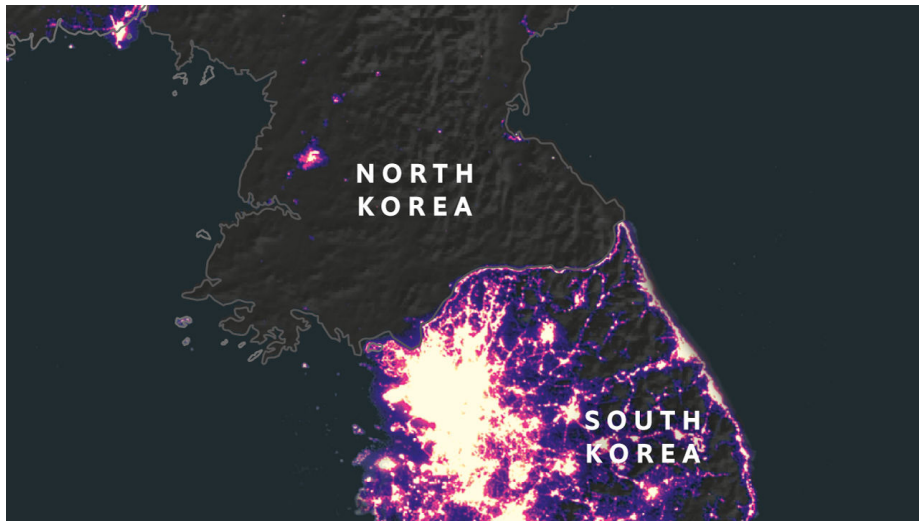
- Geografia: łatwy dostęp do rzek / morza / zasobów naturalnych
- Szczęście / historia: brak wojen lub dominacja nad innymi krajami
- Kultura: skłonności do oszczędności, edukacji i prokreacji
- Instytucje: reguły gry panujące w gospodarce

Olson (1996) porównuje kraje (prawie) identyczne względem geografii i kultury:

- Korea Południowa vs Północna
- Niemcy Zachodnie vs Wschodnie
- Tajwan i Honkgong vs Chiny

Kraje te różnią się przede wszystkim instytucjami

Półwysep koreański okiem satelity nocą



Economist (2019)

Jak myśleć o instytucjach?

- Prawa własności
- Łatwość w zawieraniu umów i transakcji
- Praworządność, egzekwowanie umów

„Złe” instytucje sprawiają, że reguły gry mogą się zmienić z dnia na dzień

„Dobre” instytucje zachęcają do długoterminowych planów i inwestycji

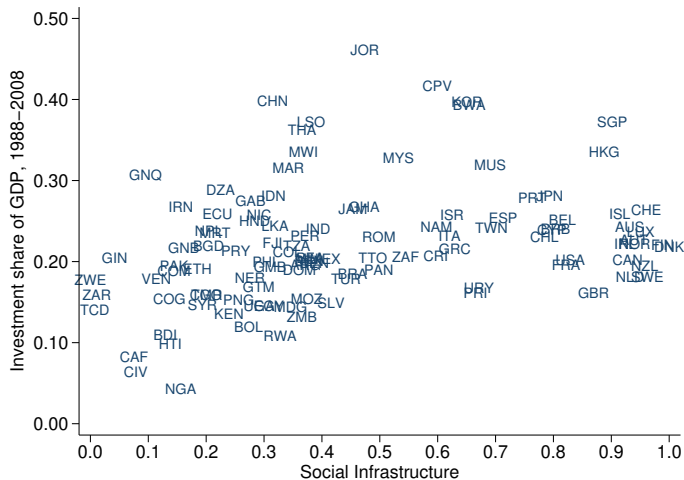
Nie da się łatwo „zmierzyć” instytucji

Bank Światowy stara się zmierzyć 6 wymiarów jakości instytucjonalnej:

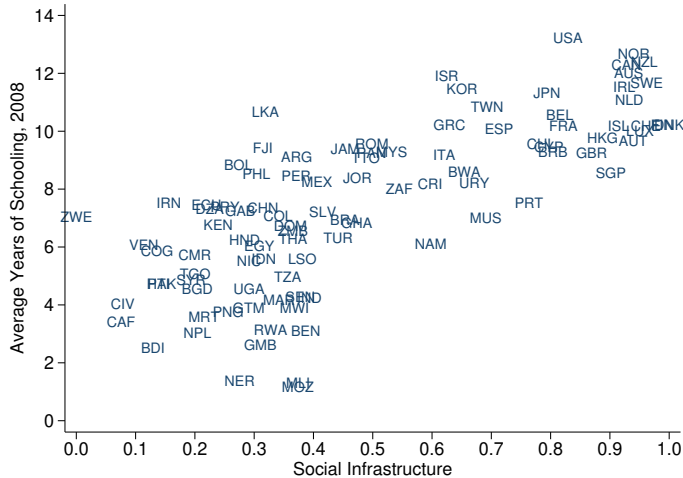
- Odpowiedzialność rządzących przed prawem
- Stabilność polityczna
- Skuteczność działania rządów
- Jakość stanowionego prawa
- Praworządność
- Zapobieganie korupcji

Na tej podstawie powstaje indeks infrastruktury społecznej

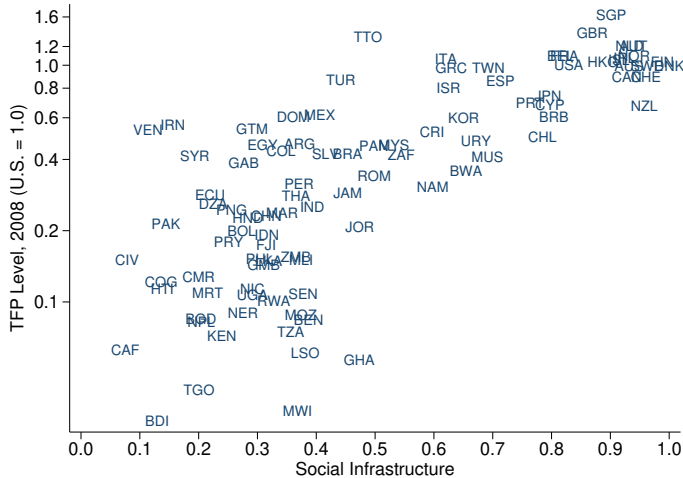
Infrastruktura społeczna a inwestycje



Infrastruktura społeczna a kapitał ludzki



Infrastruktura społeczna a poziom produktywności



Konsekwencje „wyboru instytucji” przez europejskich kolonizatorów

W krajach o niskiej śmiertelności kolonizatorzy ustanawiali instytucje inkluzywne

W krajach o wysokiej śmiertelności kolonizatorzy ustanawiali instytucje ekstraktywne

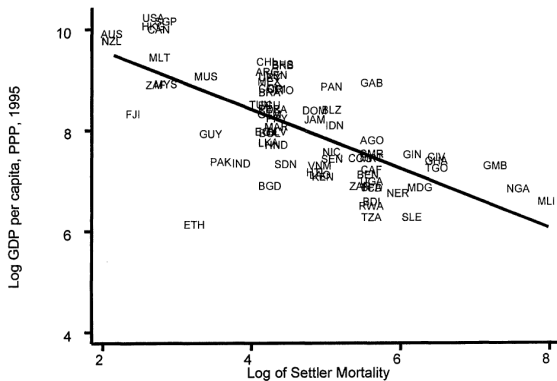


FIGURE 1. REDUCED-FORM RELATIONSHIP BETWEEN INCOME AND SETTLER MORTALITY

Wybór instytucji?

Skoro „dobre” instytucje są korzystne, dlaczego wszystkie kraje ich nie mają?

Przykład z **Acemoglu and Robinson (2012)**: dlaczego trudno ukrócić korupcję?

Można zaoferować urzędnikom wyższe płace, aby nie musieli brać łapówek, ale urzędnicy mogą pobierać wyższe wynagrodzenie i nadal brać łapówki

Instytucje są pochodną zaszłości historycznych (tyrania status quo)

Obie równowagi: z instytucjami „dobrymi” i „złymi” są stabilne, co więcej „złe” instytucje są stabilniejsze od „dobrych”

Polecane nagranie na Youtube: CGP Grey **The Rules for Rulers**

Często „dobre” instytucje są „importowane” przez nacisk zewnętrzny: Japonia, kraje Europy Środkowo-Wschodniej przed akcesją do Unii Europejskiej, Ukraina