

Łukasz Goczek

MODELOWANIE VAR I VEC

VAR: Vector Autoregression

- ◉ Modele wektorowo autoregresyjne opracowane przez laureata Nagrody Nobla C. Simsa są modelami wielorównanowymi, w których każda zmienna jest wyjaśniana przez swoje własne opóźnienia oraz opóźnienia pozostałych zmiennych objaśnianych.

VAR: Vector Autoregression

- ⊙ Jest to bardzo pomocne narzędzie, choć wydaje się być prostym modelem wielorównaniowym.
- ⊙ Powoduje to, że model jest prosty w konstrukcji i nie wymaga silnych założeń o strukturze powiązań pomiędzy zmiennymi. Istotne jest to zwłaszcza, gdy nie ma dobrej teorii lub konkurencyjne teorie dają sprzeczne wnioski.

VAR: Vector Autoregression

- ⦿ Za pomocą dużej ilości opóźnień wszystkich zmiennych w zredukowanej postaci modelu VAR ograniczono problem endogeniczności, który skutkuje niezgodnością estymatorów).

VAR: Vector Autoregression

- ⊙ Wyniki nieinterpretowalne:
- ⊙ Dużo zmiennych, nieraz olbrzymie ilości parametrów
- ⊙ Współliniowość
- ⊙ Powoduje to, że diagnostyka i wybór postaci modelu odbiega od „tradycyjnych” metod ekonometrycznych. Testowanie szczególne dla modeli wektorowo-autoregresyjnych.

VAR: Vector Autoregression

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{u}_t$$
$$t = 1, \dots, T$$

⊙ Założenia:

- $\mathbf{y}_t$: wektor k -zmiennych stacjonarnych
- $\mathbf{v}$: wektor k -parametrów stałych
- $\mathbf{A}_j$: macierz parametrów k na k , $j=1, \dots, p$
- $\mathbf{u}_t$: i.i.d. $(\mathbf{0}, \Sigma)$

⊙ Również zmienne egzogeniczne $\mathbf{X}$

VAR: Vector Autoregression

- Model VAR(p) dla k zmiennych endogenicznych posiada k równań o takiej samej strukturze.
- W każdym z k równań w roli zmiennych objaśniających występuje p opóźnień wszystkich zmiennych w układzie równań (oraz zmienne egzogeniczne):
- i-te równanie modelu:

$$\begin{aligned} y_{it} = & a_0 D_t + a_{1,i} y_{1,t-1} + a_{1,i2} y_{2,t-1} + \dots + \\ & + a_{1,ik} y_{k,t-1} + a_{2,ik} y_{k,t-2} + \dots + a_{2,ik} y_{k,t-2} + \dots \\ & + \dots + a_{p,ik} y_{ik,t-p} + \varepsilon_{it} \end{aligned}$$

VEC

- ⊙ Jeżeli $\mathbf{y}_t$ jest niestacjonarna, VAR lub VEC może być użyty w układzie skointegrowanych równań:
 - VEC (Vector Error Correction)

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{u}_t$$

$\Downarrow$

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{\Pi}_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{u}_t$$

VEC: Vector Error Correction

- Jeżeli $\mathbf{y}_t$ nie wykazuje trendu oraz $\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ ($\mathbf{\Pi}$ ma wymiar K na K , $\boldsymbol{\alpha}$ ma wymiar K na r , $\boldsymbol{\beta}$ ma wymiar K na r , r jest rzędem $\mathbf{\Pi}$, $0 < r < K$), to:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{\Pi}_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{u}_t$$

$$\Downarrow \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma}' (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\mu}) = 0$$

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\mu}) + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{\Pi}_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{u}_t$$

VEC: Vector Error Correction

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\mu}) + \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\Pi}_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{u}_t$$

- ⊙ No-constant or No-drift Model:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \text{ (or } \mathbf{v} = \mathbf{0})$$

- ⊙ Restricted-constant Model:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0} \text{ (or } \mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\mu})$$

- ⊙ Constant or Drift Model:

$$\boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$$

VEC: Vector Error Correction

- Jeżeli jest trend w $\mathbf{y}_t$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{y}_{t-j} + \delta t + \mathbf{u}_t$$

$\Downarrow$

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{\Pi}_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \delta t + \mathbf{u}_t$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}' (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\mu}) = 0$$

$$\delta t = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\rho} t + \boldsymbol{\tau} t, \boldsymbol{\tau}' (\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\rho}) = 0$$

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} t) + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{\Pi}_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\tau} t + \mathbf{u}_t$$

VEC: Vector Error Correction

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} \left(\boldsymbol{\beta}' \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\rho} t \right) + \sum_{j=1}^{p-1} \boldsymbol{\Pi}_j \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\tau} t + \mathbf{u}_t$$

- ◉ No-drift No-trend Model:
 $\boldsymbol{\gamma} = 0, \boldsymbol{\mu} = 0, \boldsymbol{\tau} = 0, \boldsymbol{\rho} = 0$ (or $\mathbf{v} = 0, \boldsymbol{\delta} = 0$)
- ◉ Restricted-constant Model:
 $\boldsymbol{\gamma} = 0, \boldsymbol{\mu} \neq 0, \boldsymbol{\tau} = 0, \boldsymbol{\rho} = 0$ (or $\mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta} = 0$)
- ◉ Constant or Drift Model:
 $\boldsymbol{\gamma} \neq 0, \boldsymbol{\mu} \neq 0, \boldsymbol{\tau} = 0, \boldsymbol{\rho} = 0$ (or $\boldsymbol{\delta} = 0$)
- ◉ Restricted-trend Model:
 $\boldsymbol{\gamma} \neq 0, \boldsymbol{\mu} \neq 0, \boldsymbol{\tau} = 0, \boldsymbol{\rho} \neq 0$ (or $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\rho}$)
- ◉ Trend Model:
 $\boldsymbol{\gamma} \neq 0, \boldsymbol{\mu} \neq 0, \boldsymbol{\tau} \neq 0, \boldsymbol{\rho} \neq 0$

Restricted VAR

- ⊙ Nałożone restrykcje na parametry
 - Zakłada się (na podstawie teorii), że niektóre z parametrów jest równa 0
- ⊙ Strukturalny VAR
 - Połączenie podejścia ateoretycznego z teorią makroekonomii

VAR w postaci średniej ruchomej

- Podobnie jak modele ADL, również modele VAR można przedstawić w postaci średniej ruchomej VMA.
- Postać ta ma szczególne znaczenie, pozwala na interpretację wyników poprzez przedstawienie ścieżki czasowej zachowania danej zmiennej w odpowiedzi na zmianę innej zmiennej.

VAR w postaci średniej ruchomej

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{y}_{t-j} + \mathbf{u}_t$$

$\Downarrow$

$$\left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j L \right) \mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{u}_t$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j L \right)^{-1} \mathbf{u}_t$$

Impulse Response Function

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \left(\mathbf{I} - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j L \right)^{-1} \mathbf{u}_t$$

Za tydzień tutorial, za dwa tygodnie – przykłady

- ⦿ Dziękuję za uwagę