

Przychody skali

- ▶ Proporcjonalne zwiększenie czynników = zwiększenie produkcji, ale czy również proporcjonalne?
- ▶ W zależności od odpowiedzi:
 - ▶ Stałe przychody skali, CRS (*constant returns to scale*)
 - ▶ Rosnące przychody skali, IRS (*increasing returns to scale*)
 - ▶ Malejące przychody skali, DRS (*decreasing returns to scale*)

Rosnące przychody skali

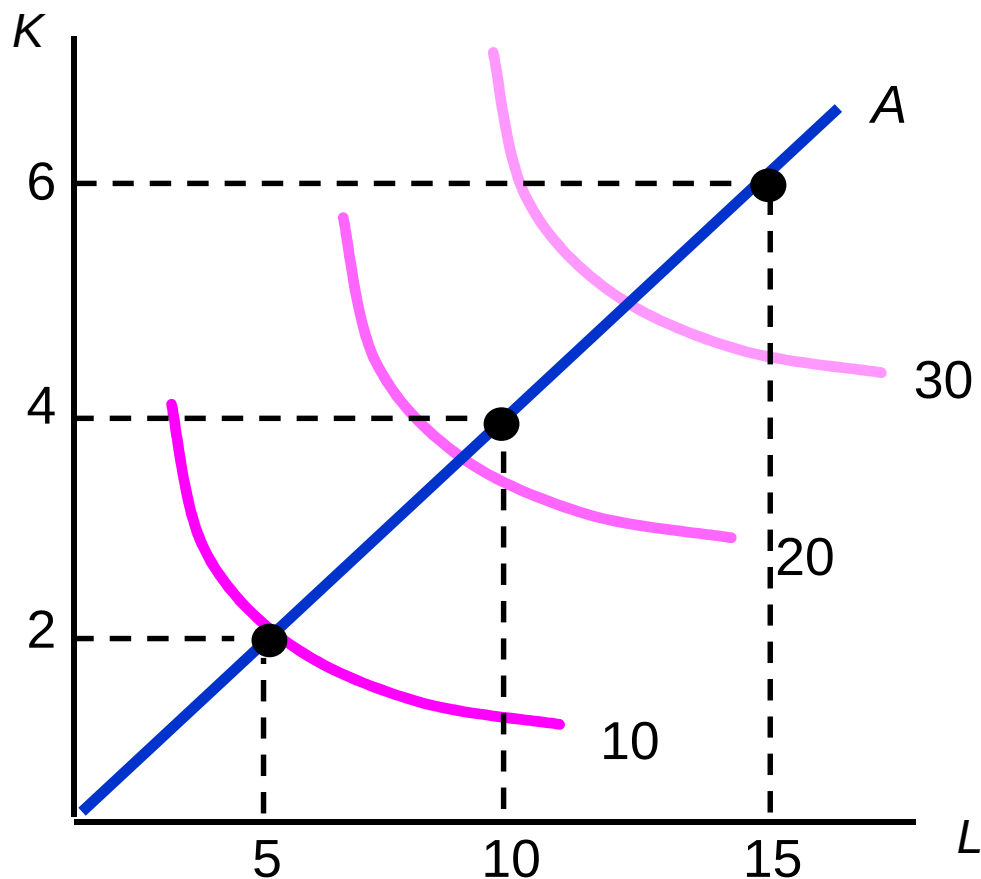
- ▶ W wyniku proporcjonalnego zwiększenia czynników produkcji produkcja rośnie ponadproporcjonalnie

$$\forall_{\lambda > 1} f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$$

- ▶ Większa produkcja wymaga średnio mniej czynników na jednostkę produkcji
- ▶ Jedna duża firma bardziej efektywna niż wiele małych
- ▶ Izokwanty ‘zagęszczają się’ ze wzrostem czynników produkcji

Rosnące przychody skali

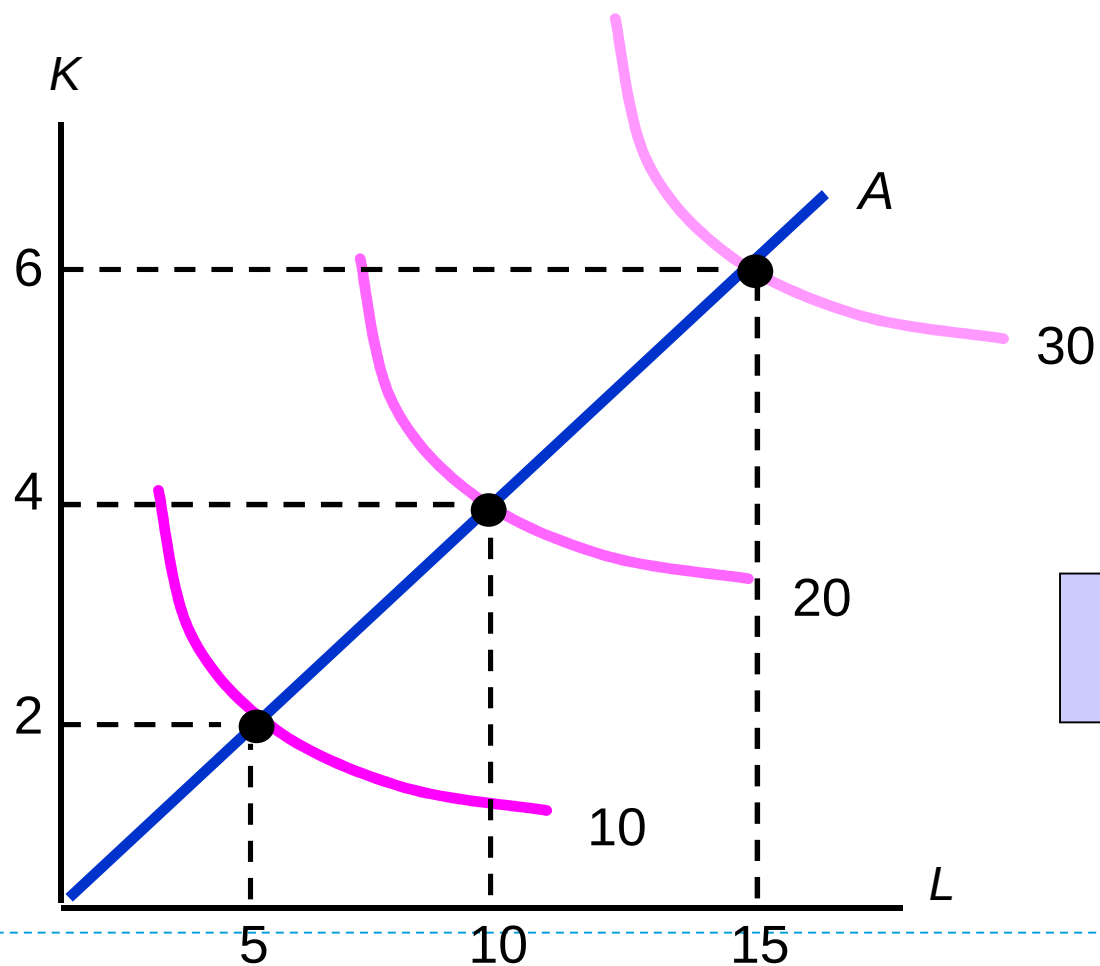
$$\forall_{\lambda > 1} f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$$



Izokwanty 'coraz gęściej'

Stałe przychody skali

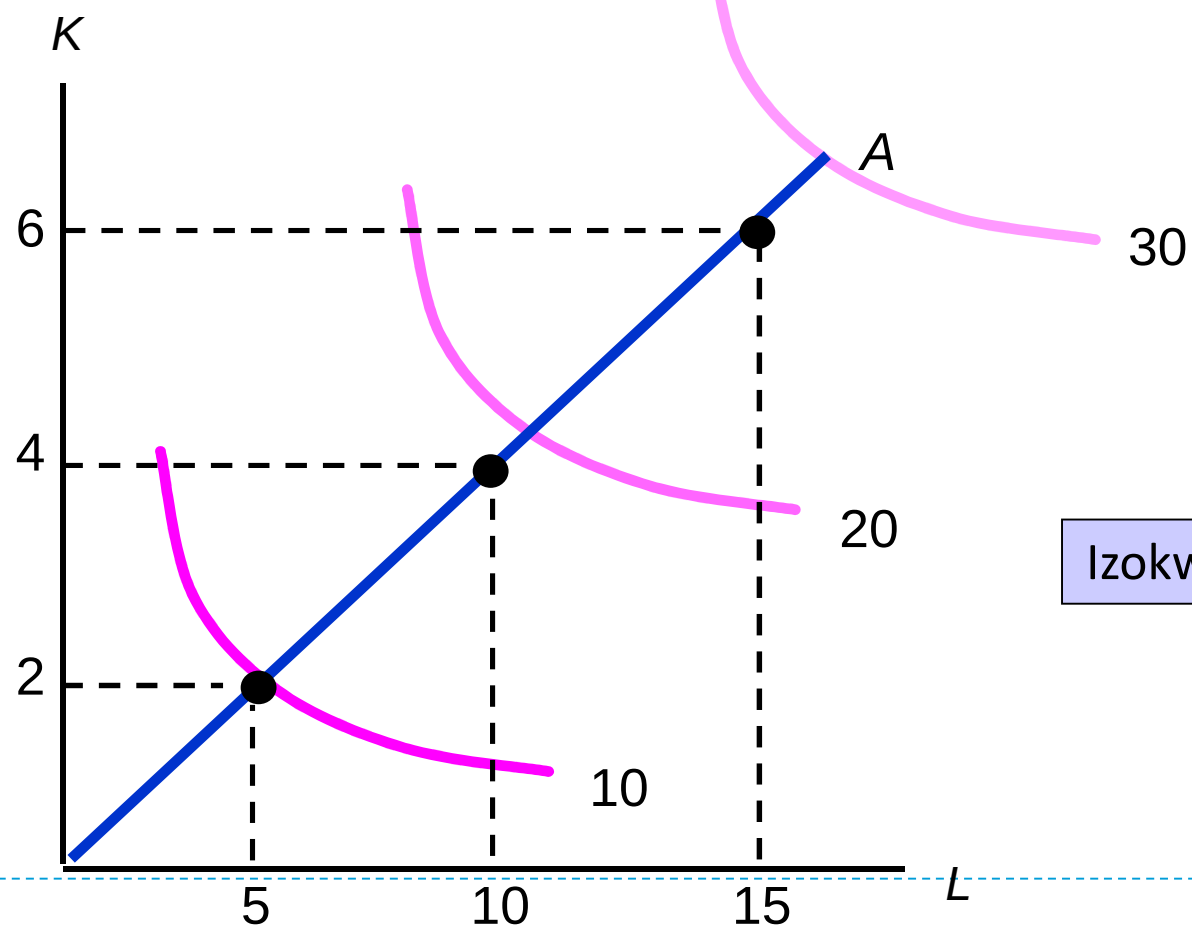
$$\forall_{\lambda > 0} f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$$



Izokwanty 'w tych samych odległościach'

Malejące przychody skali:

$$\forall_{\lambda > 1} f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$$



Izokwanty 'coraz rzadziej'

Przychody skali a funkcja Cobba-Douglasa

- ▶ Sprawdzamy przychody skali:

$$\forall_{\lambda \neq 0} \quad (\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta \stackrel{?}{=} \lambda K^\alpha L^\beta$$

$$\lambda^{\alpha+\beta} K^\alpha L^\beta = \lambda K^\alpha L^\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$$

- ▶ Więc dla funkcji Cobba-Douglasa:
 - ▶ $\alpha + \beta = 1$ – stałe przychody skali
 - ▶ $\alpha + \beta > 1$ – rosnące przychody skali
 - ▶ $\alpha + \beta < 1$ – malejące przychody skali

Case study – dlaczego przepowiednie Malthusa się nie sprawdziły?

- ▶ Malejące krańcowe produktywności vs. malejące przychody skali

- ▶ Przykład:

$$q(K, L) = K^{2/3} L^{2/3}$$

- ▶ Malejąca krańcowa produktywność K :

$$MP_K = \frac{\partial q(K, L)}{\partial K} = \frac{2}{3} K^{-1/3} L^{2/3} = \frac{2L^{2/3}}{3K^{1/3}}$$

$$\frac{\partial^2 q(K, L)}{\partial^2 K} = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) K^{-4/3} L^{2/3} = - \left(\frac{2L^{2/3}}{9K^{4/3}} \right) < 0$$

Case study – dlaczego przepowiednie Malthusa się nie sprawdziły?

- ▶ Malejąca krańcowa produktywność L :

$$MP_L = \frac{\partial q(K, L)}{\partial L} = \frac{2}{3} K^{2/3} L^{-1/3} = \frac{2K^{2/3}}{3L^{1/3}}$$

$$\frac{\partial^2 q(K, L)}{\partial^2 L} = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) K^{2/3} L^{-4/3} = - \left(\frac{2K^{2/3}}{9L^{4/3}} \right) < 0$$

- ▶ Więc obie MP malejące

Case study – dlaczego przepowiednie Malthusa się nie sprawdziły?

- ▶ A przychody skali...

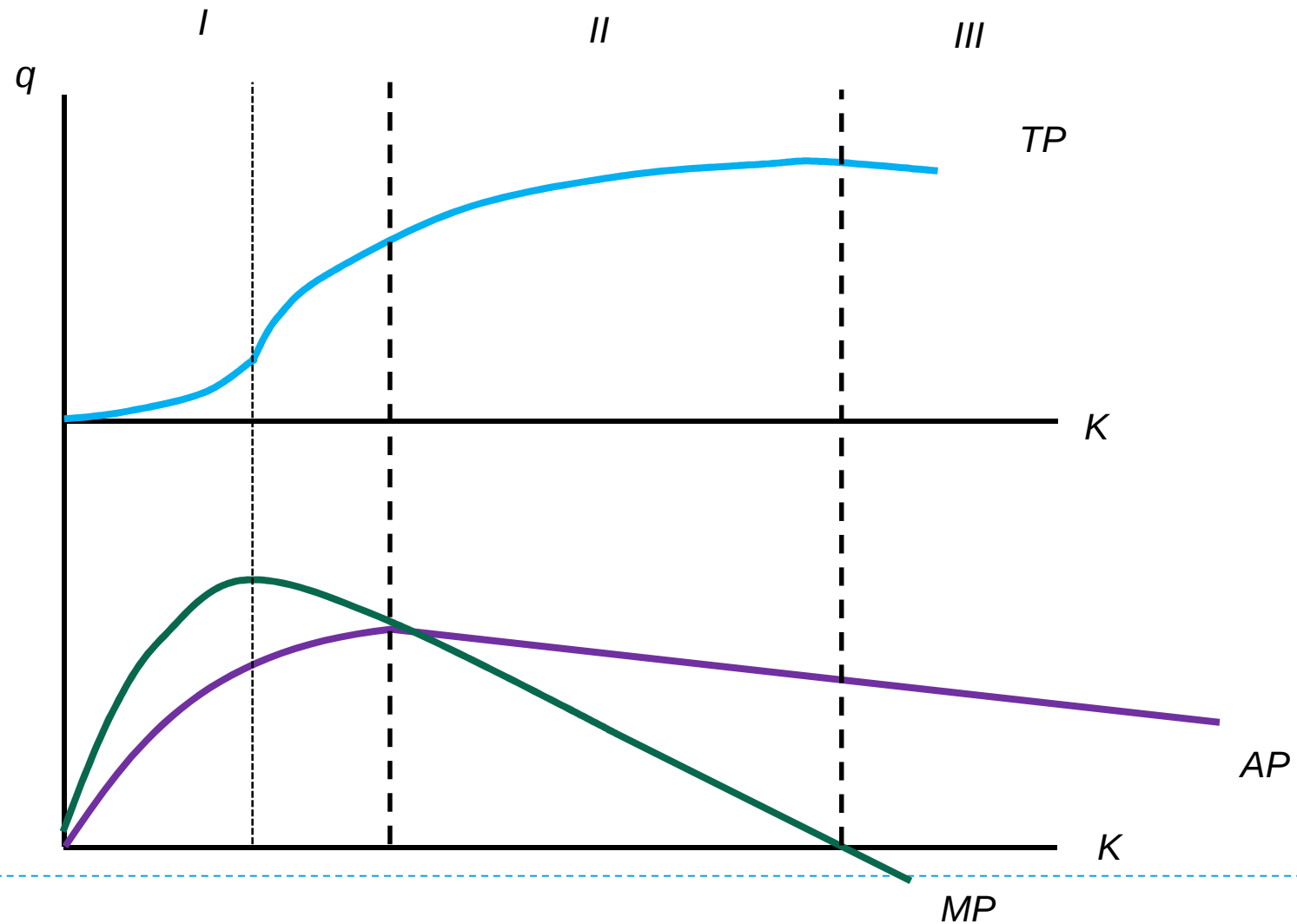
$$q(\lambda K, \lambda L) \stackrel{?}{=} \lambda q(K, L)$$

$$(\lambda K)^{2/3} (\lambda L)^{2/3} \stackrel{?}{=} \lambda K^{2/3} L^{2/3}$$

$$\lambda^{4/3} K^{2/3} L^{2/3} > \lambda K^{2/3} L^{2/3}$$

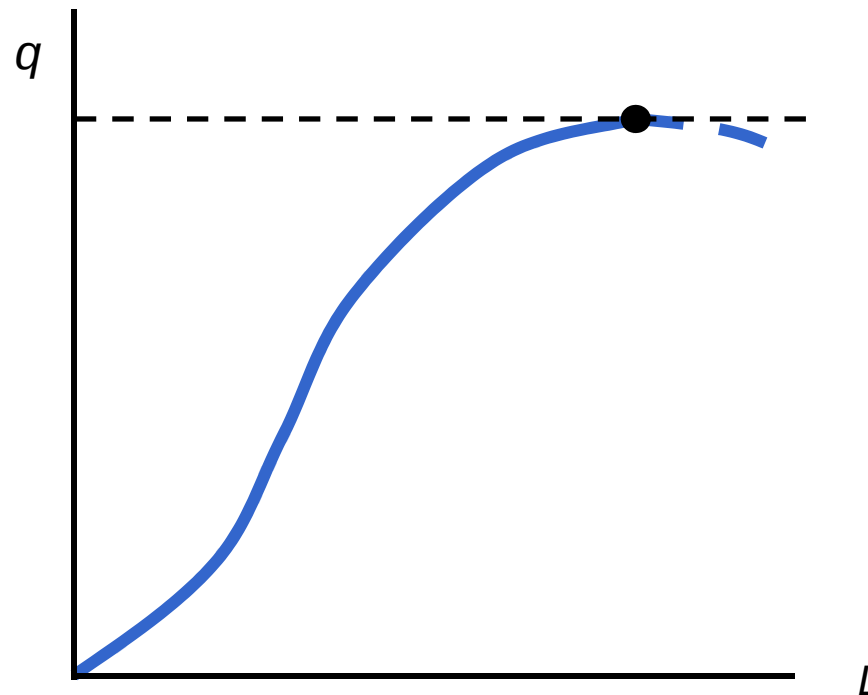
- ▶ ...rosnące

Trzy fazy funkcji produkcji



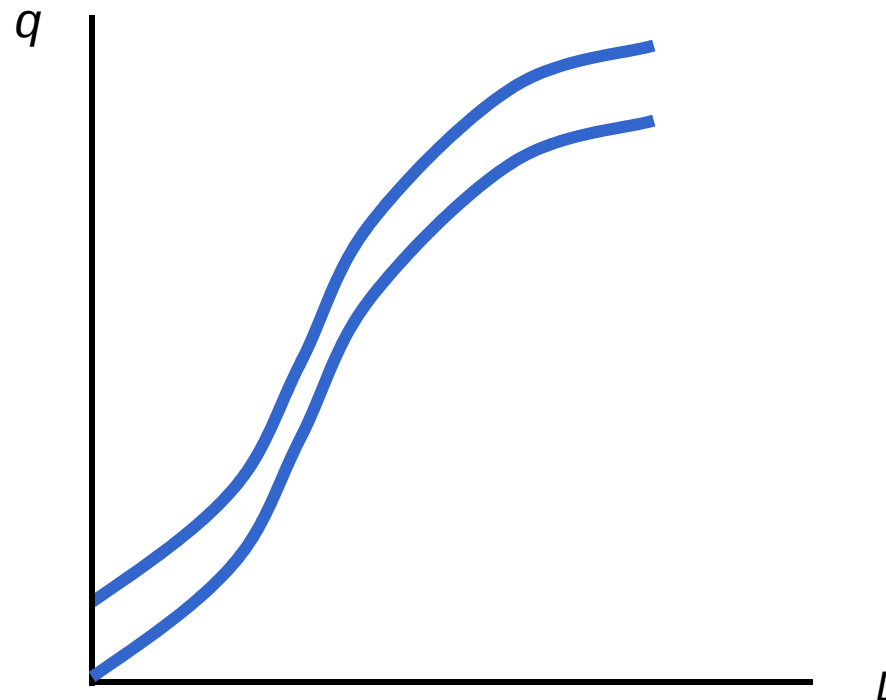
Własności (pożądane) funkcji produkcji

- ▶ Monotoniczność (= f-cja niemalejąca) - powiększenie ilości co najmniej jednego czynnika nie zmniejszy produkcji
- ▶ Swobodne dysponowanie (*free disposal*) – niepotrzebnych czynników można pozbyć się bez ponoszenia kosztów



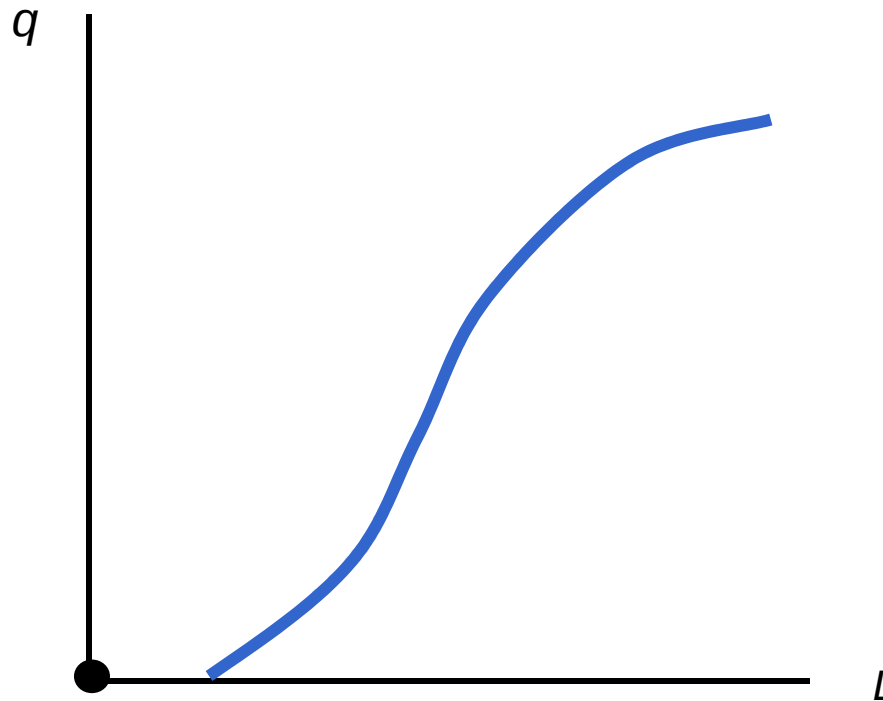
Własności (pożądane) funkcji produkcji

- ▶ Nic za darmo (*no free lunch*)



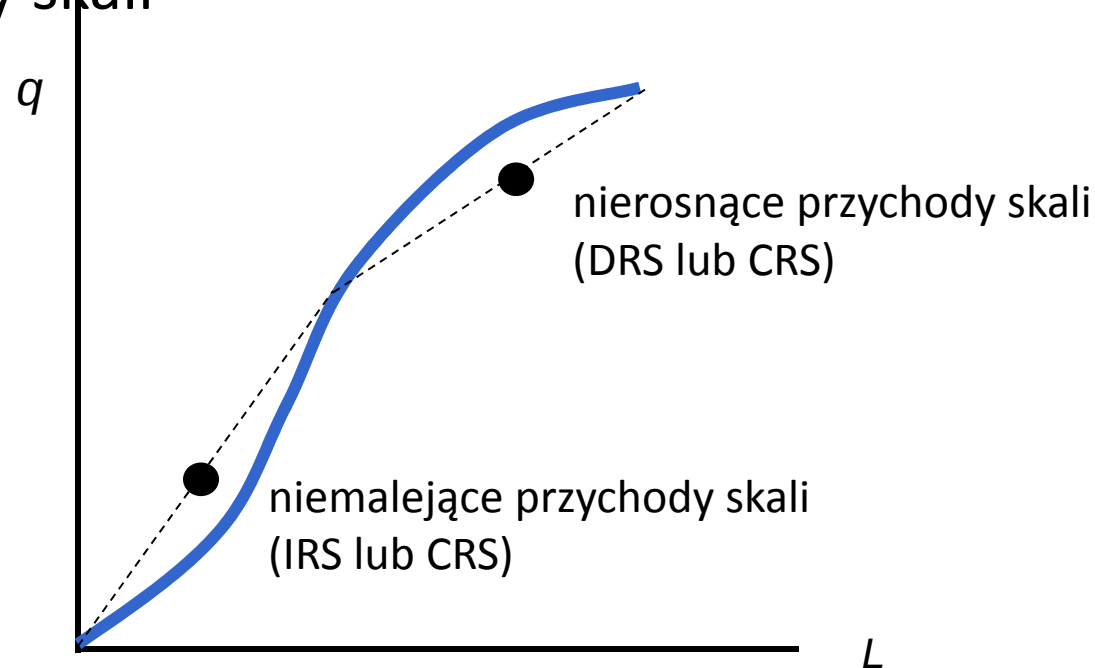
Własności (pożądane) funkcji produkcji

- ▶ Możliwość braku działania (*possibility of inaction*) – zawsze można zaprzestać produkcje

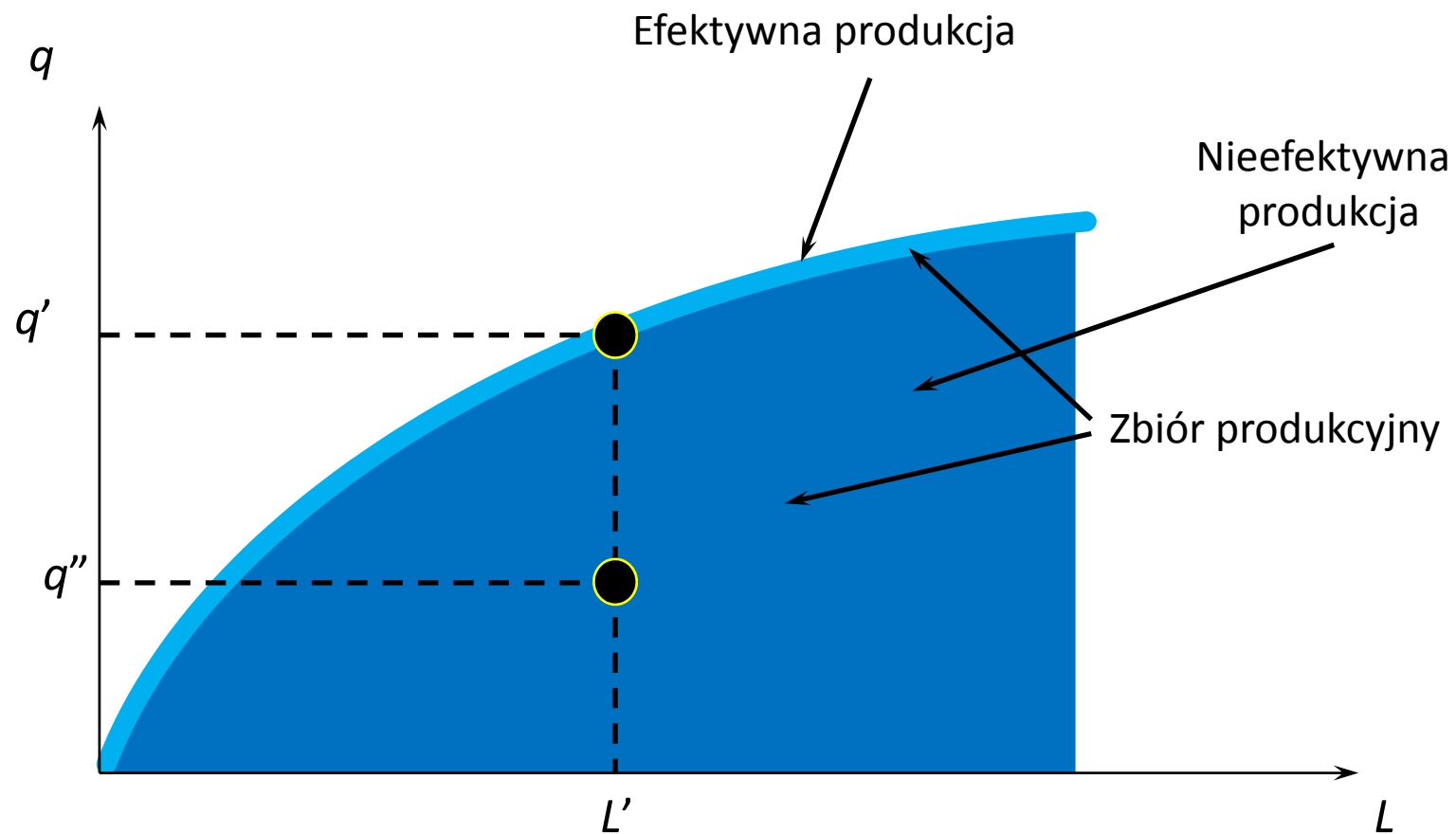


Własności funkcji produkcji

- ▶ **Nieodwracalność** – nie można cofnąć procesu produkcyjnego
(z jajecznicy nie można odzyskać pięciu jaj, dwóch gram tłuszczu, czas poświęcony na pracę itd.)
- ▶ **Izokwanty są wypukłe** – liniowa kombinacja dowolnych dwóch koszyków czynników daje nie mniejszą produkcję niż każdy z tych koszyków
- ▶ **Przychody skali**



Zbiory produkcyjne



Homogeniczność funkcji

- ▶ Funkcja $f(K, L)$ homogeniczna (jednorodna) stopnia α gdy pomnożenie każdego z jej argumentów przez stałą λ spowoduje zmianę wartości funkcji w proporcji λ^α

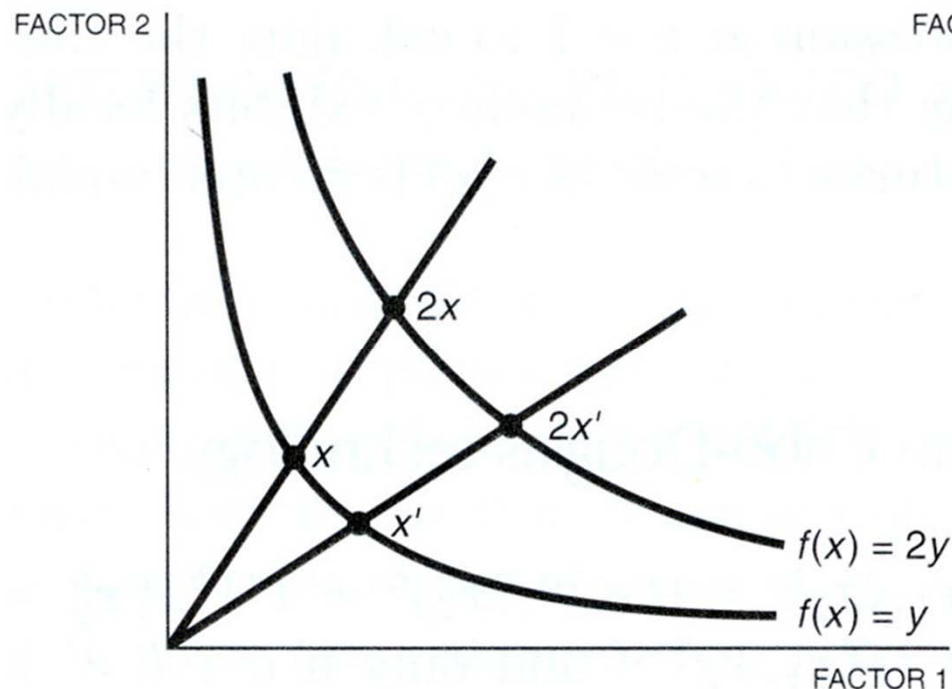
$$\exists_{\alpha} \quad \forall_{\lambda > 0} \quad f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\alpha f(K, L)$$

- ▶ Jeśli funkcja $f(\mathbf{x})$ jest homogeniczna stopnia $\alpha \geq 1$ to $\partial f(\mathbf{x}) / \partial x_i$ homogeniczna stopnia $\alpha - 1$
- ▶ Stałe przychody skali – funkcja produkcji homogeniczna stopnia $\alpha = 1$ (nie musi być taka funkcja liniowa)
- ▶ Rosnące przychody skali - funkcja produkcji homogeniczna stopnia $\alpha > 1$
- ▶ Malejące przychody skali - funkcja produkcji homogeniczna stopnia $\alpha < 1$
 - ▶ Funkcja Cobba-Douglasa – homogeniczna stopnia $(a+b)$
 - ▶ Ograniczenie budżetowe – homogeniczne stopnia 0 (jeśli ceny wszystkich dóbr oraz dochód zmieniają się w tej samej proporcji, to zbiór budżetowy const.)

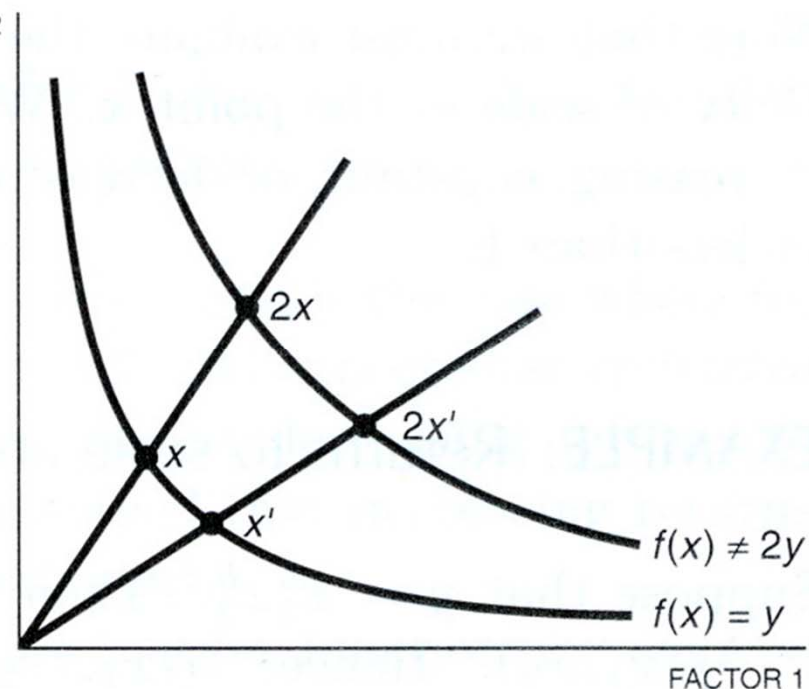
Homotetyczność funkcji

- ▶ Funkcja homotetyczna (jednokładna) $g[f(K,L)]$ – monotoniczna transformacja dowolnej funkcji homogenicznej $f(K,L)$
- ▶ Funkcja homotetyczna jest odwzorowaniem geometrycznym funkcji homogenicznej
- ▶ Każda funkcja homogeniczna jest funkcją homotetyczną, ale funkcja homotetyczna nie musi być funkcją homogeniczną
 - ▶ $g = e^f$, gdzie $f = K^a L^b$ - tutaj $g(\lambda K, \lambda L) \neq \lambda^\alpha g(K,L)$
 - ▶ $g = f^2$, gdzie $f = K^a L^b$ - tutaj $g(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\alpha g(K,L)$ gdyż $\alpha = 2(a+b)$
- ▶ Dla funkcji homogenicznej stopnia 1 lub homotetycznej *MRTS* nie zależy od skali produkcji

Homogeniczność / homotetyczność funkcji



Funkcja homogeniczna stopnia 1
(jeśli x i x' mogą produkować y ,
to $2x$ i $2x'$ mogą wyprodukować $2y$)



Funkcja homotetyczna
ale niehomogeniczna
(jeśli x i x' mogą produkować tyle samo y ,
to $2x$ i $2x'$ mogą wyprodukować też tyle
samo, ale niekoniecznie $2y$)

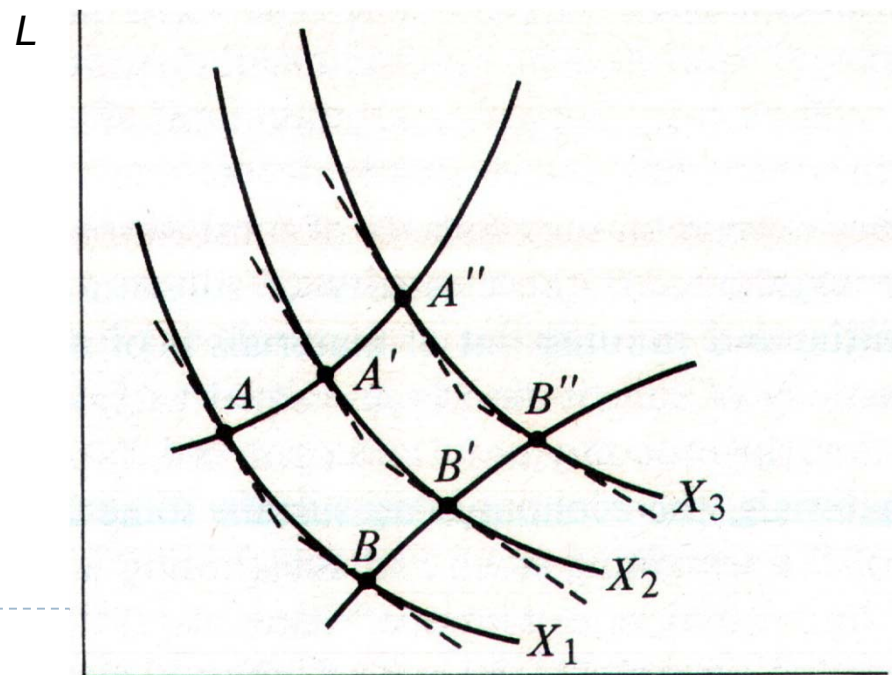
Izokwanty są obrazem samych siebie wzdłuż promieni

Dla każdego promienia – to samo nachylenie każdej izokwanty

Funkcja produkcji zależy od relatywnej ilości czynników, nie od ich absolutnych wartości.

Izokliny

- ▶ Izoklina dostarcza informacji o tym, jak kolejne izokwanty mają się do siebie
- ▶ 'Wszystkie punkty na mapie izokwant, w których $MRTS$ jest jednakowe'
- ▶ Dla każdego punktu izokwanty można wyznaczyć izoklinę



K

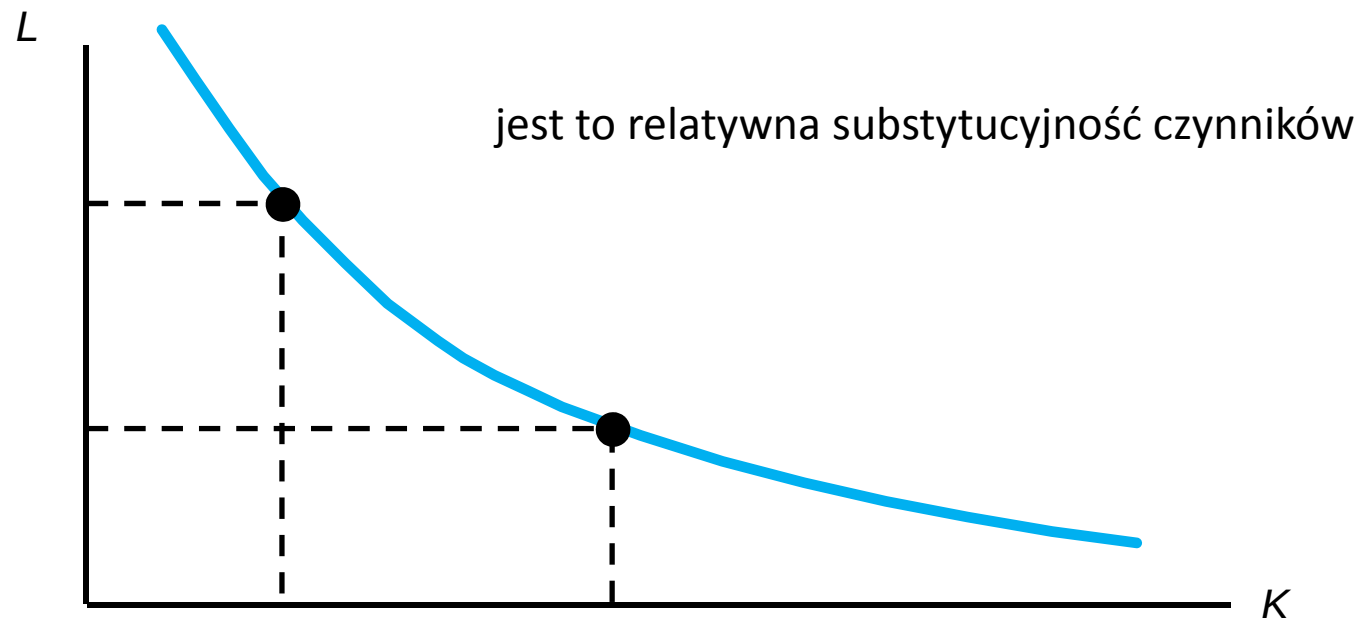
Elastyczność

- ▶ Elastyczność cenowa popytu:
 - ▶ 'Relatywna zmiana popytu wynikająca z relatywnej zmiany ceny'

$$q = f(p)$$

$$\varepsilon_P q = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p}{q}$$

Elastyczność technicznej substytucji czynników



- ▶ Każdej $MRTS_{KL}$ odpowiada jakiś punkt (K,L) na izokwancie, a więc jakaś relacja L/K (czyli L/K jest funkcją $MRTS_{KL}$)
- ▶ σ_{LK} mierzy jak zmieniają się warunki wymiany czynników ($MRTS_{KL}$) jeśli wziąć inne proporcje czynników (czyli jak zmienia się relacja czynników ze zmianą nachylenia izokwanty)

Elastyczność technicznej substytucji czynników

- ▶ Elastyczność zdefiniowana jest jako relatywna zmiana stosunku czynników do relatywnej zmiany $MRTS$:

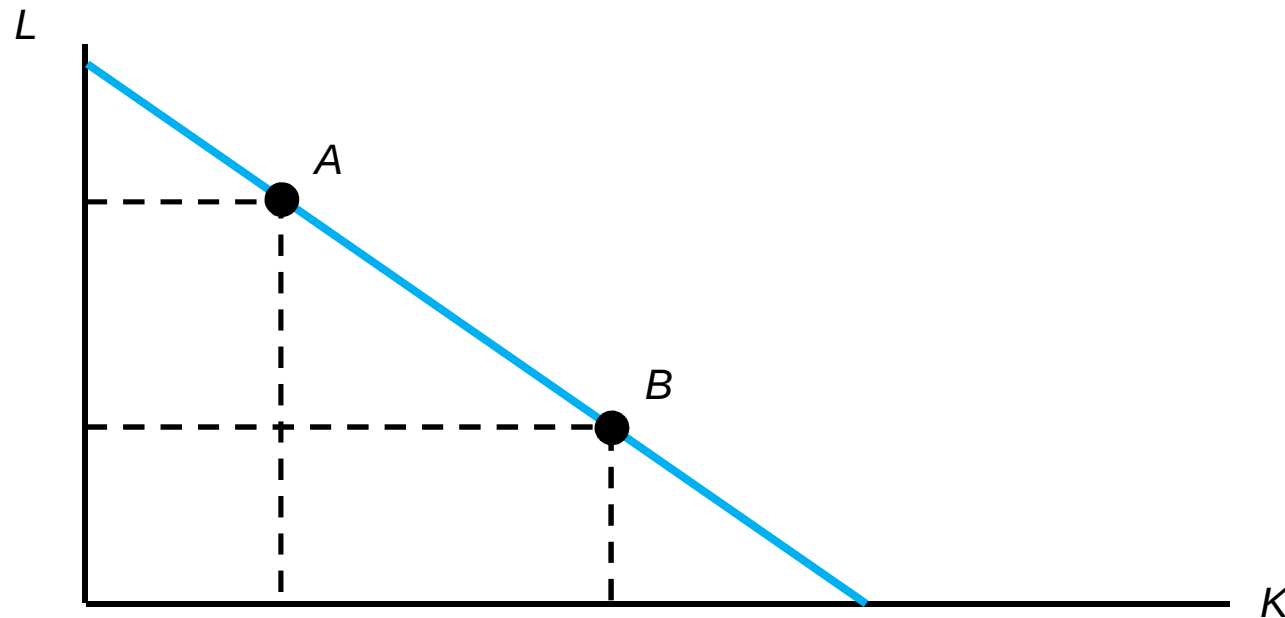
$$\sigma_{LK} = \varepsilon_{MRTS_{KL}} \frac{L}{K} \qquad \sigma_{LK} = \frac{\frac{d(L/K)}{L/K}}{\frac{dMRTS_{KL}}{MRTS_{KL}}} = \frac{d \ln(L/K)}{d \ln |MRTS_{KL}|}$$

- ▶ Jeśli mała zmiana nachylenia daje dużą zmianę relacji czynników – izokwanta jest relatywnie płaska (wysoka elastyczność substytucji)
- ▶ Mierzy kurwaturę izokwanty ($MRTS_{KL}$ – mierzy jej nachylenie)
- ▶ Intuicyjnie: 'relatywna substytucyjność czynników'



Elastyczność technicznej substytucji czynników

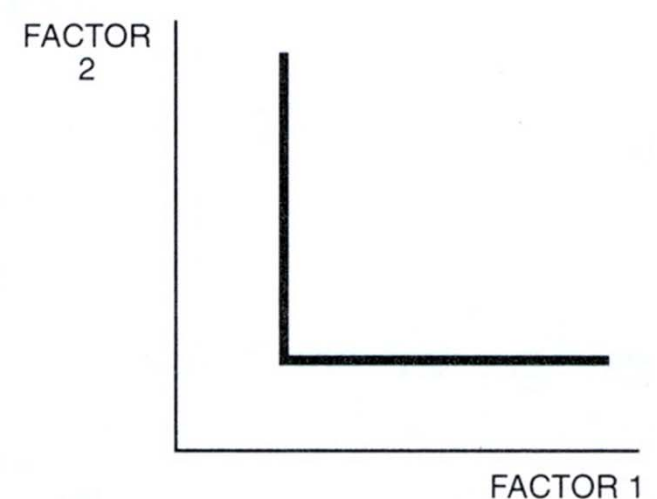
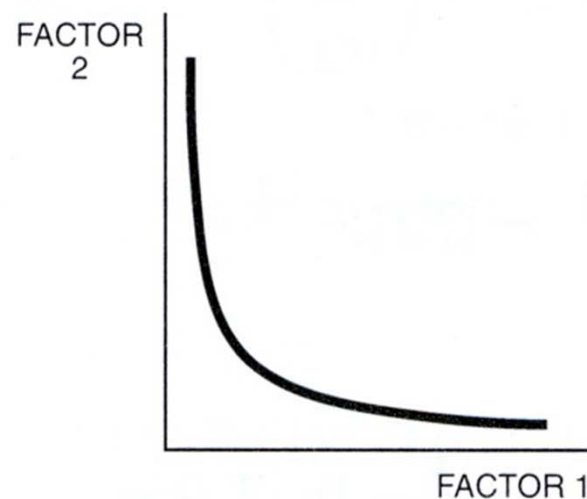
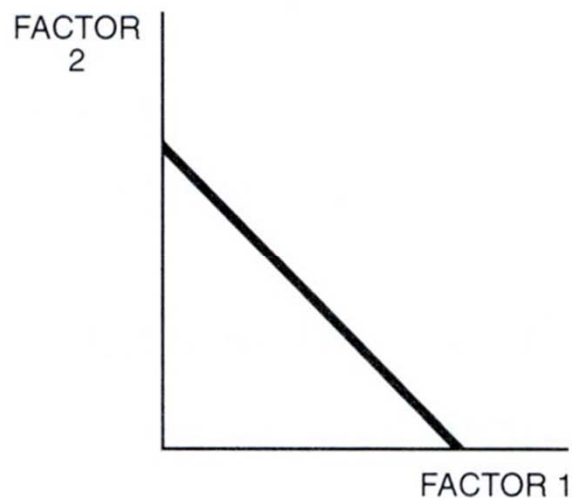
- ▶ Liniowa funkcja produkcji, izokwanta:



- ▶ W A inna relacja L/K niż w B , a $MRTS$ taka sama
- ▶ Wniosek: elastyczność substytucji nieskończona

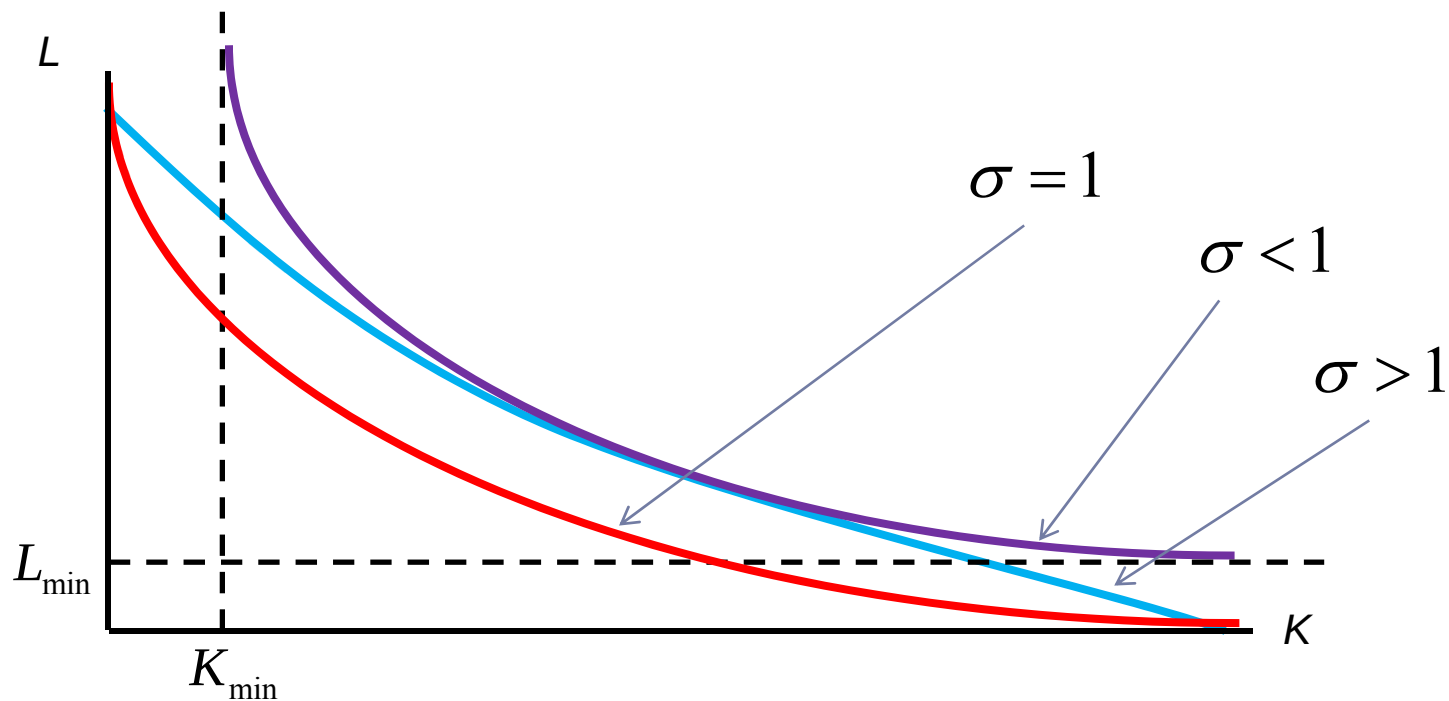
Funkcja CES

- ▶ Funkcja o stałej elastyczności substytucji $y = (aK^\rho + bL^\rho)^{\frac{\gamma}{\rho}}$
 - ▶ elastyczność substytucji: $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$
 - ▶ CRS: $\gamma = 1$
- ▶ Niektóre przypadki szczególne funkcji CES:
 - ▶ Liniowa funkcja produkcji: $\rho = 1, \sigma = \infty \quad y = K + L$
 - ▶ Funkcja produkcji Leontiefa: $\rho = -\infty, \sigma = 0$
 - ▶ Funkcja produkcji Cobba-Douglasa: $\rho = 0, \sigma = 1$



Elastyczność technicznej substytucji czynników

► Graficznie:



Niezbędne czynniki produkcji

- ▶ ‘Czynnik produkcji jest *niezbędny*, jeśli przy jego nakładzie 0 produkcja wynosi 0, niezależnie od nakładów innych czynników’

$$\exists_{X_k} \forall_{X_1, \dots, X_n \neq X_k} f(X_1, \dots, X_k = 0, \dots, X_n) = 0$$

- ▶ Dla wypukłych izokwant, jeśli elastyczność technicznej substytucji ≤ 1 to czynnik niezbędny



Przykład – zrównoważony rozwój

- ▶ Załóżmy, że wszystkie odnawialne czynniki produkcji połączymy w jeden syntetyczny czynnik
- ▶ Drugim czynnikiem produkcji będą czynniki nieodnawialne (np. żelazo, węgiel, ropa, aluminium...)
 - ▶ W długim okresie wykorzystanie tych czynników musi zmaleć
- ▶ Przyszłość ludzkości zależy od elastyczności technicznej substytucji czynników odnawialnych i nieodnawialnych
 - ▶ Jeśli $\sigma > 1$ – czynniki nieodnawialne nie są niezbędne
 - ▶ Jeśli $\sigma = 1$ – czynniki nieodnawialne są niezbędne, ale gospodarka nie musi się zawalić
 - ▶ Jeśli $\sigma < 1$ – w końcu czynników nieodnawialnych zabraknie

