

Kalkulacja rezerw z optymalnym ważeniem informacji o szkodach wyplaconych oraz szkodach zgłoszonych i niewyplaconych

Piotr Krzemiński

Credit Agricole Ubezpieczenia na Życie

Wojciech Otto

Uniwersytet Warszawski

**Referat przygotowany na Ogólnopolską Konferencję Naukową
„Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka”**

Warszawa, 15-17 czerwca 2011

Wprowadzenie

Prezentacja dotyczy metody kalkulacji rezerw opartej na równoczesnym wykorzystaniu dwóch „trojkątów danych”:

- trójkąta szkód wypłaconych i trójkąta szkód ujawnionych,
- oraz dokonującej optymalnego wyważenia (opartego na teorii zaufania) dwóch źródeł informacji:
- o danej kohorcie szkód (Chain Ladder) i innych kohortach (Bornhuetter-Ferguson).

Temat był prezentowany na poprzednich konferencjach przez Piotra Krzemińskiego oraz Karolinę Napierałę (współautor W. Otto).

Tym razem wyniki są dojrzsze o tyle, że formułujemy explicite parę kluczowych założeń, które pozwalają w koherentny sposób:

- powiązać równanie predykcji całej rezerwy z równaniami predykcji rok po roku,
- zaprojektować praktyczną metodę estymacji parametrów równań predykcyjnych

Przy okazji udało się także wyjaśnić rolę, jaką w zagadnieniu pełną błędy popełniane przez likwidatorów szacujących wartość szkód zgłoszonych i niewypłaconych, w szczególności zaś konsekwencje obciążenia i wariancji owych oszacowań.

Fakt: dwa obserwowane rozkłady wiąże trzeci, ukryty

Trójkąty danych zawierają informacje o rozkładach czasu oczekiwania:

- dane o szkodach ujawnionych zawierają informację o rozkładzie czasu, jaki upływa **od zajścia szkody do jej zgłoszenia**,
- zaś dane o wypłatach zawierają informację o rozkładzie czasu, jaki upływa **od zajścia szkody do jej likwidacji**.

Atrakcyjne wyniki otrzymaliśmy przyjmując pewne upraszczające założenie o trzecim rozkładzie:

- czasu upływającego **pomiędzy zgłoszeniem szkody a jej likwidacją**.

Przyjęliśmy mianowicie, iż dla danej kohorty szkód:

- rozkład **dalszego czasu oczekiwania na likwidację** szkód, które należą do zbioru szkód zgłoszonych i niezlikwidowanych, **nie zależy od tego, jak dawno temu były zgłoszone**

Założenie to znajduje się gdzieś pośrodku pomiędzy dwiema skrajnymi alternatywami:

- zasadą First In First Out, oraz:
- zasadą Last in First Out.

Podstawowe oznaczenia

- $X_{t,k}$ - wartość szkód zaszłych w roku t wypłaconych w roku $t+k-1$,
- $CX_{t,k} = X_{t,1} + \dots + X_{t,k}$ - skumulowana wart. szkód z roku t wypłaconych po k latach rozwoju,
- $CR_{t,k}$ - rezerwa wyznaczona metodą indywidualną na szkody zgłoszone na koniec $t+k-1$
- EP_t - składka zarobiona w roku t ,

Wielkości obserwowane:

- $CX_{t,k}$, $X_{t,k}$, $CR_{t,k}$ dla takich (t,k) , że: $t, k = 1, 2, 3, \dots$, oraz $t+k-1 \leq n$,
- EP_t dla $t = 1, 2, 3, \dots, n$.

Wielkości ważne, ale z założenia nieznane:

- $CR_{t,k}^{paid=j}$ - część $CR_{t,k}$ dotycząca szkód wypłaconych w roku $t+j-1$ (dla $j > k$),
- $X_{t,j}^{rep \leq k}$ - część $X_{t,j}$ dotycząca szkód zgłoszonych przed końcem roku $t+k-1$ (dla $j > k$),

Uwaga: obie wielkości dotyczą tych samych szkód, ale $CR_{t,k}^{paid=j}$ opiera się na ocenach likwidatorów zaś $X_{t,j}^{rep \leq k}$ na kwotach rzeczywiście wypłaconych.

Założenia modelu statystycznego klasyczne i nieklasyczne

(A1) Latom zajścia szkód przypisany jest ciąg i.i.d. parametrów ryzyka $\Theta_1, \dots, \Theta_n$, takich że:

$$\Theta_t := (ULR_t, \Sigma_t^2, W_t^2), \quad E(ULR_t) = ULR, \quad \text{var}(ULR_t) = U^2, \quad E(\Sigma_t^2) = \Sigma^2, \quad E(W_t^2) = W^2.$$

(A2) $E(X_{t,k} | \Theta_t) = (p_k^P - p_{k-1}^P) \cdot EP_t \cdot ULR_t$, oraz $E(CR_{t,k} | \Theta_t) = p_k^{I-P} \cdot EP_t \cdot ULR_t$, gdzie:

$$p_k^{I-P} \doteq p_k^I - p_k^P \geq 0, \quad 0 = p_0^P \leq p_1^P \leq \dots \leq p_n^P = 1, \quad 0 = p_0^I \leq p_1^I \leq \dots \leq p_n^I = 1.$$

(A3) $\text{cov}(X_{t,k}, X_{s,j} | \Theta_t, \Theta_s) = (p_k^P - p_{k-1}^P) \cdot EP_t^2 \cdot \Sigma_t^2 \cdot \mathbf{1}_{\{(s=t) \wedge (k=j)\}}$

(A4) $E(CR_{t,k}^{\text{paid}=j} | \Theta_t) = (1 + B) \cdot E(X_{t,j}^{\text{rep} \leq k} | \Theta_t)$, gdzie: $B \in (-1, \infty)$

(A5) $E(CR_{t,k}^{\text{paid}=j} | \Theta_t) = p_k^{I-P} \cdot \frac{p_j^P - p_{j-1}^P}{1 - p_k^P} \cdot \mathbf{1}_{(j > k)} \cdot EP_t \cdot ULR_t$

(A6) $\text{cov}(CR_{t,k}, X_{s,j} | \Theta_t, \Theta_s) = p_k^{I-P} \cdot \frac{p_j^P - p_{j-1}^P}{1 - p_k^P} \cdot \mathbf{1}_{\{(s=t) \wedge (j > k)\}} \cdot EP_t^2 \cdot \Sigma_t^2$

(A7) $\text{cov}(CR_{t,k}, CR_{s,j} | \Theta_t, \Theta_s) = p_{\min\{k,j\}}^{I-P} \cdot \frac{1 - p_{\max\{k,j\}}^P}{1 - p_{\min\{k,j\}}^P} \cdot \mathbf{1}_{(s=t)} \cdot EP_t^2 \cdot (1 + B) \cdot (\Sigma_t^2 + W_t^2)$

Istota założeń o błędach ocen dokonywanych przez likwidatorów

Założenia (A4) – (A7) opisują m.in. mechanizm związany z przewidywaniem wartości szkód zgłoszonych przez likwidatorów. Dopuszczają one:

- systematyczne obciążenie ich ocen (o ile $B \neq 0$),
- oraz wariancję (o ile $W^2 > 0$).

Wariancja całkowitej rzeczywistej wartości szkód z roku t (pod warunkiem Θ_t) wynosi $EP_t^2 \Sigma_t^2$.

Jeśli jednak wartość szkód ustalimy na podstawie początkowych ocen likwidatorów, wariancja warunkowa wyniesie $EP_t^2 (1+B)^2 (W_t^2 + \Sigma_t^2)$. W naszych obserwacjach tkwi jednak tylko część tej wariancji, jako że na żadnym etapie rozwoju nie zdarza się, aby wszystkie szkody były już zgłoszone, a żadna z nich nie była jeszcze wypłacona.

Należy zauważyć, że obciążenie jest już uwzględnione w wysokości parametru p_k^{I-P} , i to dlatego parametr obciążenia B nie pojawia się w założeniu (A6), zaś w założeniu (A7) pojawia się tylko w pierwszej potęgde.

Istotnym uproszczeniem jest założenie, że oceny szkód zgłoszonych dokonywane przez likwidatorów na koniec roku zgłoszenia nie są rewidowane aż do momentu likwidacji. Oczywiście, błędy ocen likwidatorów dla szkód zgłaszanych i likwidowanych w ciągu tego samego roku nie mają wpływu na obserwowane przez nas zmienne.

Istota założeń o czasie upływającym od zgłoszenia do likwidacji szkód

Założenia (A4) – (A7) opisują także proces transformacji napływających zgłoszeń w szkody wypłacone. Ich sens polega na przyjęciu, że:

- rozkład dalszego czasu oczekiwania na likwidację dla wszystkich szkód zgłoszonych przed końcem roku $t + k - 1$ jest taki sam (bez względu na to, jak dawno dana szkoda została zgłoszona), i dany jest współczynnikami:

$$\frac{p_{k+1}^P - p_k^P}{1 - p_k^P}, \frac{p_{k+2}^P - p_{k+1}^P}{1 - p_k^P}, \dots, \frac{p_{n-1}^P - p_{n-2}^P}{1 - p_k^P}, \frac{1 - p_{n-1}^P}{1 - p_k^P}$$

Jest to w istocie założenie o “losowym porządku” w jakim szkody są likwidowane. Mieści się ono gdzieś pomiędzy dwiema skrajnościami:

- regułą “First In First Out”, oraz:
- regułą “Last In First Out”.

W przypadku pewnych grup ubezpieczeń prawdziwsze byłoby pewnie jakieś założenie mieszczące się pomiędzy regułą “losowego porządku” i regułą “FIFO”. Rzecz w tym, że tylko przy założeniu o “losowym porządku” udało się nam otrzymać eleganckie wyniki.

Istota metody

Metoda polega na zastosowaniu powiązanych ze sobą modeli liniowych. Predykcji ostatecznej wartości szkód (a więc i rezerwy) służy model pierwszy:

$$CX_{t,n} = a_k \cdot EP_t \cdot ULR + b_k \cdot \frac{CX_{t,k}}{p_k^P} + c_k \cdot \frac{CR_{t,k}}{p_k^{I-P}} + \varepsilon_{t,k}$$

Zaś estymacji parametrów na podstawie trójkątów danych służy model drugi, dwurównaniowy:

$$CX_{t,k+1} = \alpha_k^P \cdot EP_t \cdot URL + \beta_k^P \cdot \frac{CX_{t,k}}{p_k^P} + \gamma_k^P \cdot \frac{CR_{t,k}}{p_k^{I-P}} + \varepsilon_{t,k}^P$$

$$CX_{t,k+1} + CR_{t,k+1} = \alpha_k^I \cdot EP_t \cdot URL + \beta_k^I \cdot \frac{CX_{t,k}}{p_k^P} + \gamma_k^I \cdot \frac{CR_{t,k}}{p_k^{I-P}} + \varepsilon_{t,k}^I$$

Przy przyjętych założeniach optymalne wartości współczynników $a_k, b_k, c_k, \alpha_k^P, \beta_k^P, \gamma_k^P$, oraz $\alpha_k^I, \beta_k^I, \gamma_k^I$ okazują się być funkcjami tych samych parametrów:

- $(g, u^2, ULR, p_1^P, p_1^I, p_2^P, p_2^I, \dots, p_{n-1}^P, p_{n-1}^I)$, gdzie przyjęto skrótowe oznaczenia:
- $g := (1+B)(1+w^2)$, $w^2 := W^2 / \Sigma^2$, $u^2 := U^2 / \Sigma^2$

Wyniki dla równania predykcji

Optymalne współczynniki:

$$a_k^* = \frac{(1+g)q_k^P - p_k^{I-P}}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2},$$

$$b_k^* = \frac{p_k^P (1+g)(1+u^2)}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2},$$

$$c_k^* = \frac{p_k^{I-P} (1+u^2)}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2}.$$

Wariancja błędów predykcji:

$$\text{MSE}(a_k^*, b_k^*, c_k^*) = \text{var}(\varepsilon_{t,k}) = EP_t^2 \Sigma^2 \frac{(1+u^2) \{ (1+g)q_k^P - p_k^{I-P} \}}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2},$$

gdzie dodatkowe oznaczenie to: $q_k^P := 1 - p_k^P$.

Optymalne współczynniki równań estymacyjnych

$$\alpha_k^{P*} = \frac{h_k \{(1+g)q_k^P - p_k^{I-P}\}}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2} ,$$

$$\beta_k^{P*} = \frac{p_k^P \{(1+g)(1+u^2 p_{k+1}^P) + u^2 p_k^{I-P} (1-h_k)\}}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2} ,$$

$$\gamma_k^{P*} = \frac{p_k^{I-P} h_k (1+u^2)}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2} ,$$

$$\alpha_k^{I*} = \frac{(1+g)(p_{k+1}^I - p_k^I + p_k^{I-P} h_k) - p_k^{I-P} h_k}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2} ,$$

$$\beta_k^{I*} = \frac{p_k^P \{(1+g)[1+u^2(p_{k+1}^I - p_k^{I-P} (1-h_k))]\} + u^2 p_k^{I-P} (1-h_k)}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2} ,$$

$$\gamma_k^{I*} = \frac{p_k^{I-P} \{(1+g)(1+u^2 p_k^P)(1-h_k) + h_k + u^2 [p_{k+1}^I - p_k^P (1-h_k)]\}}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2} ,$$

gdzie dodatkowe oznaczenie to: $h_k = (p_{k+1}^P - p_k^P) / q_k^P$.

Kowariancje błędów równań estymacyjnych

$$\text{var}(\varepsilon_{t,k}^P) = EP_t^2 \Sigma^2 h_k \frac{(1+g)(1+p_{k+1}^P u^2)q_k^P + p_k^{I-P} [u^2 q_{k+1}^P - h_k(1+u^2)]}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2},$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_{t,k}^I) = & \frac{EP_t^2 \Sigma^2}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2} \left\{ (1+g)^2 (1+p_k^P u^2) [p_{k+1}^{I-P} + p_k^{I-P} (1-h_k)^2] + \right. \\ & + (1+g) [(h_k + p_{k+1}^I u^2) (q_k^P - 2p_k^{I-P} (1-h_k)) + u^2 (p_{k+1}^{I-P} (p_k^{I-P} - p_k^P) - p_{k+1}^I q_{k+1}^I)] + \\ & \left. + p_k^{I-P} h_k [u^2 (q_{k+1}^I - p_{k+1}^{I-P}) - h_k (1+u^2)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{t,k}^P, \varepsilon_{t,k}^I) = EP_t^2 \Sigma^2 h_k \frac{(1+g) [(1+p_{k+1}^I u^2) q_k^P - p_k^{I-P} (1-h_k) (1+u^2)] + p_k^{I-P} [u^2 q_{k+1}^I - h_k (1+u^2)]}{(1+g)(1+p_k^P u^2) + p_k^{I-P} u^2},$$

gdzie dodatkowe oznaczenie to: $q_k^I := 1 - p_k^I$.

Procedura estymacji

Minimalizacja (ze względu na η , przy zadanym η_0) funkcji:

$$SS(\eta, \eta_0) = \frac{(e_{1,n-1}^P(\eta))^2}{\text{var}(\varepsilon_{1,n-1}^P(\eta_0))} + \sum_{t=1}^n \sum_{k=0}^{f(t)} [e_{t,k}^P(\eta) \quad e_{t,k}^I(\eta)] [\Omega^{(k)}(\eta_0)]^{-1} \begin{bmatrix} e_{t,k}^P(\eta) \\ e_{t,k}^I(\eta) \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie:}$$

- $f(t) = \min\{n-2, n-t\}$,
- $\Omega^{(k)}(\eta_0) := \begin{bmatrix} \text{var}(\varepsilon_{t,k}^P(\eta_0)) & \text{cov}(\varepsilon_{t,k}^P(\eta_0), \varepsilon_{t,k}^I(\eta_0)) \\ \text{cov}(\varepsilon_{t,k}^P(\eta_0), \varepsilon_{t,k}^I(\eta_0)) & \text{var}(\varepsilon_{t,k}^I(\eta_0)) \end{bmatrix}$ jest macierzą kowariancji błędów predykcji wyznaczoną w punkcie η_0 ,
- $e_{1,k}^P(\eta)$ oraz $e_{1,k}^I(\eta)$ oznaczają błędy predykcji jako funkcje parametrów:

$$\eta = (g, u^2, ULR, p_1^P, p_1^I, p_2^P, p_2^I, \dots, p_{n-1}^P, p_{n-1}^I)$$

Procedura IRNLS (Iteratively Re-weighted Nonlinear Least Squares) zwraca wyniki kolejnych iteracji:

- $\eta_t := \arg \min_{\eta} SS(\eta, \eta_{t-1})$,

co kontynuuje się do momentu spełnienia kryterium zbieżności.