

Odporność składki kwantylowej ze względu na zaburzenia rozkładu wielkości pojedynczej szkody w modelu ryzyka łącznego

Warszawa, 15.06.2011

Arkadiusz Filip, Marcin Wienke

Plan

- 1. Cel i metoda badania
- 2. Narzędzia analityczne i struktura modelu
- 3. Miary odporności
- 4. Wyniki
- 5. Dalsze obszary badań

Cel i metoda badania (1)

- Badanie odporności składki – badanie wystarczalności składki w kontekście błędów popełnionych przy jej kalkulacji
- Metoda symulacyjna

Narzędzia analityczne i struktura modelu

- Model jednookresowy
- Kolektywny model ryzyka
- Rozkład Poissona do modelowania liczby szkód
- Kwantylowa | $P(W > H) = 1 - B,$ i
- Zaburzony proces szkodowy

Narzędzia analityczne i struktura modelu

- Rodzaje zaburzeń:
 - Zaburzenie typu I – zmiana rozkładu szkody po kalkulacji składki (rozkład pojedynczej szkody to rozkład mieszany)
 - Zaburzenie typu II – błędnie dobrana postać funkcyjna w momencie kalkulacji składki
 - Zaburzenie typu III – błędnie założona homogeniczność procesu szkodowego (rozkład pojedynczej szkody to rozkład mieszany)

Narzędzia analityczne i struktura modelu

Rodzaj zaburzenia	Typ I	Typ II	Typ III		
Rozkład główny	gamma	LN	Weibulla		
Rozkład zaburzający	Pareto	GP	Burra		
Metoda aproksymacji	normalna	gamma	NP		
Siła Zaburzenia	0%	1%	5%	10%	100%
Poziom bezpieczeństwa	98%	99%	99,5%		
Wielkość portfela	500	1000	5000		

Narzędzia analityczne i struktura modelu

- Momenty rozkładów (metoda momentów użyta do estymacji parametrów)

Rozkład	Momenty		
	Wartość oczekiwana	Wariancja	Skośność
Gamma	20 000	4 000 000	0,200
LN	20 000	4 000 000	0,301
Weibulla	20 000	4 000 000	0,156
Pareto	20 000	800 000 000	7,071
Burra	20 000	800 000 000	5,303
GP	20 000	800 000 000	8,839

- Symulacja – metoda odwracania dystrybuanty
- Symulacja – 100 000 iteracji

Miary odporności

- Liczba przypadków w symulacji w których nastąpiła niewypłacalność

$$t = \sum_{i=1}^{100\,000} I(W_i > H)$$

- Prawdopodobieństwo niewypłacalności zakładu – empiryczny estymator

$$\bar{q} = \frac{t}{100\,000}$$

- Względna różnica między empirycznym i zakładanym prawdopodobieństwem niewypłacalności

$$T = \frac{\bar{q} - (1 - B)}{1 - B} \cdot 100\%$$

Miary odporności

- Liczba stanów niewypłacalności – liczba przypadków w których $\bar{q} > \bar{q}^*$, gdzie $\bar{q}^*$ jest wartością krytyczną na poziomie istotności α , przy której odrzucamy hipotezę, że rzeczywiste prawdopodobieństwo niewypłacalności jest równe zakładanemu tj. $1 - B$ i

$$\bar{q} \sim N\left(1 - B, \frac{B(1 - B)}{100\,000}\right)$$

B	$\bar{q}^*$
99,50%	0,55
99,00%	1,07
98,00%	2,10

- Średnia wartość nadwyżki szkód ponad składkę

$$e_n(H) = \frac{\sum_{i=1}^N z_i}{N}$$

$$R = \frac{e_n(H)}{H} \cdot 100\%$$

Wyniki

Precyzyjna wiedza o średniej szkodzie i zmienności szkód pozwala zmniejszyć ryzyko niewypłacalności

Liczba stanów niewypłacalności – porównanie zaburzenia typu I i III								
APROKSYMACJA	TYP I				TYP III			
	SIŁA ZABURZENIA				SIŁA ZABURZENIA			
	0,01	0,05	0,1	Suma	0,01	0,05	0,1	Suma
normalna	79	81	81	241	81	81	81	243
gamma	43	81	78	202	1	52	67	120
NP	14	58	68	140	4	43	63	110
Suma	136	220	227	583	86	176	211	473

Wyniki

Duży wpływ postaci funkcyjnej modelu w przypadku wysokiej skośności rozkładu wielkości pojedynczej szkody

Składki dla portfela 1000 polis przy niezaburzonym rozkładzie głównym						
APROKSYMACJA	POZIOM BEZPIECZEŃSTWA	ROZKŁAD GŁÓWNY				
		gamma	LN	Weibulla	Pareto	gamma1
normalna	98,00%	330 538	330 538	330 538	424 977	424 977
	99,00%	347 865	347 865	347 865	454 839	454 839
	99,50%	363 722	363 722	363 722	482 168	482 168
gamma	98,00%	341 199	341 201	341 190	506 171	474 281
	99,00%	362 665	362 667	362 652	573 824	524 888
	99,50%	382 791	382 792	382 774	640 859	573 814
NP	98,00%	341 479	341 480	341 469	521 513	478 608
	99,00%	362 865	362 867	362 852	587 195	528 370
	99,50%	382 881	382 883	382 864	651 215	576 083

Wyniki

Mały wpływ postaci funkcyjnej modelu w przypadku niskiej skośności rozkładu wielkości pojedynczej szkody

Współczynnik T dla zaburzenia typu II i wariantu bez zaburzeń (portfel 500 polis)							
APROKSY- MACJA	POZIOM BEZPIE- CZEŃSTWA	ROZKŁAD GŁÓWNY I ZABURZAJACY					
		gamma			LN		
		gamma	LN	Weibulla	LN	gamma	Weibulla
normalna	98,00%	54%	54%	54%	51%	48%	51%
	99,00%	74%	79%	73%	76%	73%	80%
	99,50%	132%	130%	136%	128%	142%	127%
gamma	98,00%	-1%	-1%	0%	-2%	0%	-1%
	99,00%	-1%	1%	5%	7%	-1%	7%
	99,50%	-9%	-4%	-1%	-7%	3%	3%
NP	98,00%	-8%	-2%	-1%	-7%	-2%	-3%
	99,00%	-1%	-2%	-2%	1%	-1%	-5%
	99,50%	2%	-11%	0%	2%	-3%	-12%

Wyniki

Aproksymacja normalna daje najgorsze rezultaty i jest najbardziej wrażliwa na wielkość portfela i poziom bezpieczeństwa

Współczynnik T dla symulacji bez zaburzeń.										
APROKSYMACJA	ROZKŁAD GŁÓWNY	POZIOM BEZPIECZEŃSTWA I WIELKOŚĆ PORTFELA								
		98,00%			99,00%			99,50%		
		500	1000	5000	500	1000	5000	500	1000	5000
normalna	gamma	54%	39%	21%	74%	60%	28%	132%	93%	31%
	LN	51%	37%	16%	76%	53%	27%	128%	89%	43%
	Weibulla	48%	35%	17%	73%	66%	31%	130%	88%	30%
gamma	gamma	-1%	1%	-1%	-1%	2%	1%	-9%	-5%	3%
	LN	-2%	5%	1%	7%	3%	1%	-7%	-11%	8%
	Weibulla	-2%	-1%	-1%	7%	-3%	-1%	-6%	1%	-3%
NP	gamma	-8%	-7%	0%	-1%	-3%	-3%	2%	-5%	1%
	LN	-7%	1%	0%	1%	-5%	3%	2%	-8%	1%
	Weibulla	-5%	-1%	-1%	0%	-8%	-1%	-11%	-4%	-2%

Wyniki

Zaburzenie o niewielkiej sile może poprawić wyniki, jeżeli jest ono w pewien sposób uwzględnione przy kalkulacji składki

Liczba stanów niewypłacalności w zależności od siły zaburzenia – zaburzenie typu III				
ROZKŁAD GŁÓWNY	SIŁA ZABURZENIA			
	0	0,01	0,05	0,1
gamma	16	11	20	24
LN	21	10	19	24
Weibulla	11	9	18	24
Suma	48	30	57	72

Wyniki

Większa skośność rozkładu zaburzającego prowadzi do średnio bardziej odpornej składki

Wielkość współczynnika T dla symulacji z zaburzeniami – rodzina rozkładów Pareto, portfel 1000 polis							
APROKSYMACJA	POZIOM BEZPIECZEŃSTWA	ROZKŁAD ZABURZAJĄCY I SIŁA ZABURZENIA					
		Burra			GP		
		0,01	0,05	0,1	0,01	0,05	0,1
normalna	98,00%	95%	87%	89%	88%	90%	84%
	99,00%	165%	171%	174%	165%	165%	173%
	99,50%	294%	286%	292%	288%	276%	296%
gamma	98,00%	-21%	-20%	-24%	-25%	-26%	-24%
	99,00%	-19%	-18%	-23%	-25%	-30%	-28%
	99,50%	-12%	-12%	-20%	-20%	-28%	-26%
NP	98,00%	-32%	-36%	-34%	-38%	-37%	-40%
	99,00%	-37%	-41%	-33%	-37%	-36%	-34%
	99,50%	-24%	-32%	-32%	-28%	-30%	-30%

Wyniki

Pozytywny wpływ zwiększania wielkości portfela i poziomu bezpieczeństwa na współczynnik R

Wielkość współczynnika R przy zaburzeniu typu II (rozkład zakładany - gamma)					
APROKSYMACJA	POZIOM BEZPIECZEŃSTWA	Portfel 500 polis		Portfel 5000 polis	
		Rozkład rzeczywisty		Rozkład rzeczywisty	
		LN	Weibulla	LN	Weibulla
normalna	98,00%	11,7%	11,9%	4,5%	4,5%
	99,00%	10,9%	11,1%	4,1%	4,0%
	99,50%	9,6%	9,7%	3,8%	3,9%
gamma	98,00%	10,8%	11,0%	4,5%	4,5%
	99,00%	9,7%	8,9%	4,0%	4,3%
	99,50%	8,2%	8,5%	3,6%	3,7%
NP	98,00%	11,1%	10,7%	4,4%	4,3%
	99,00%	9,6%	9,0%	4,1%	3,9%
	99,50%	7,6%	8,7%	3,5%	3,9%

Dalsze obszary badań

- Zależności między polisami
- Modelowanie dodatkowych procesów ubezpieczeniowych (np. odmowy)
- Modelowanie wielookresowe
- Inne metody aproksymacji