Uniwersytet Ekonomiczny
we Wrocławiu

DR JOANNA DĘBICKA

ZASTOSOWANIE ODPOWIEDNIKA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO THIELE'GO DO ROZBICIA SKŁADEK W UBEZPIECZENIACH WIELOSTANOWYCH

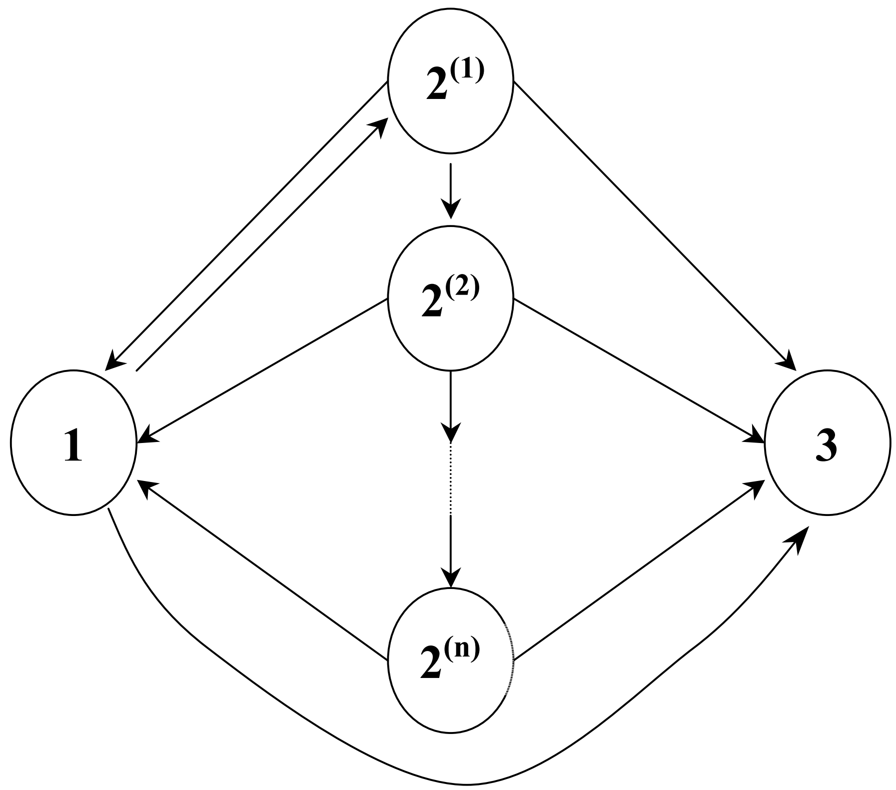
ZAGADNIENIA AKTUARIALNE – TEORIA I PRAKTYKA

WARSZAWA, 15 - 17 MAJA 2011

UBEZPIECZENIE WIELOSTANOWE

PRZYKŁAD – UBEZPIECZENIE OD RYZYKA CIĘŻKIEJ CHOROBY

n - okres ubezpieczenia



1 - ubezpieczony jest zdrowy,

$2^{(h)}$ - ubezpieczony jest chory, a choroba trwa h-tą jednostkę czasu, dla $h = 1, 2, ..., n$,

3 - ubezpieczony nie żyje.

MODEL WIELOSTANOWY

$$(S,T)$$

przestrzeń stanów

$$S=\{1,2,\ldots,N\}$$

zbiór wszystkich możliwych bezpośrednich przejść między stanami,

(i,j) - bezpośrednie przejście ze stanu i do stanu j ($i\neq j$, $i,j\in S$),

STRUKTURA PROBABILISTYCZNA MODELU

$\{X(t);t\in \mathrm{T}\}$ - proces stochastyczny przyjmujący wartości ze skończonej przestrzeni stanów S.

ZAŁOŻENIE : $\mathrm{T}=\{0,1,2,\ldots\}$ - *dyskretny* $\{X(t);t\in \mathrm{T}\}$ - *łańcuch Markowa*

Funkcja dyskontująca

OPROCENTOWANIE I DYSKONTOWANIE

- **Stochastyczna stopa procentowa**:

– $\{Y(t) : t \geq 0\}$ - proces stopy procentowej jest procesem stochastycznym o stacjonarnych przyrostach.

– Współczynnik dyskontujący ma postać $(0 \leq t \leq k)$

$$\upsilon(t,k) = e^{-(Y(k)-Y(t))}$$

- **Stała stopa procentowa** - współczynnik dyskontujący ma postać $(0 \leq t \leq k)$

$$\upsilon(t,k) = \upsilon^{k-t}$$

Przepływy pieniężne

Formy składek i świadczeń tworzących przepływy pieniężne:

$p_j(k)$ - składka okresowa płacona w momencie k, gdy $X(k) = j$,

$\pi_j(k)$ - składka jednorazowa płacona w ustalonym momencie k jeżeli $X(k) = j$,

$\ddot{b}_j(k)$ - renta płacona z góry w momencie k, gdy $X(k) = j$,

$b_j(k)$ - renta płacona z dołu w momencie k, gdy $X(k) = j$,

$d_j(k)$ - jednorazowe świadczenie płacone w ustalonym momencie k, gdy $X(k) = j$,

$c_{ij}(k)$ - jednorazowe świadczenie płacone w momencie k, gdy $X(k) = j$, a $X(k-1) = i$.

Niech $\wp$ oznacza jeden z typów przepływów pieniężnych:

$$\wp \in \left\{ p, \pi, \ddot{b}, b, d, c_1, c_2, \ldots, c_N \right\}$$

gdzie c_i oznacza jednorazowe świadczenie płacone z dołu zwiazane z opuszczeniem stanu i.

Wartość aktualna

Przepływy pieniężne

Funkcja dyskontująca

Niech $\Upsilon_t^{\wp,j}(k)$ będzie *aktualną w momencie t wartością przepływu pieniężnego* $\wp$ płaconego w chwili *k*, gdy $X(k)=j$.

Jeżeli $\wp \in \{p,\pi,\ddot{b},b,d\}$, to

$$\Upsilon_t^{\wp,j}(k)=\upsilon(t,k)\mathbf{1}_{\{X(k)=j\}}\wp_j(k)$$

Jeżeli $\wp \in \{c_1,c_2,\ldots,c_N\}$, to

$$\Upsilon_t^{c_i,j}(k)=\begin{cases}\upsilon(t,k)\mathbf{1}_{\{X(k-1)=i\wedge X(k)=j\}}c_{ij}(k) & dla \quad i\neq j\\ 0 & dla \quad i=j\end{cases}$$

Model wielostanowy i jego struktura probabilistyczna

Funkcja dyskontująca

Założenia:

- **Stochastyczna stopa procentowa** (Frees, Parker):

Z1 Zmienne losowe $X(t)$ oraz $Y(t)$ są niezależne

Z2 Wszystkie momenty losowej funkcji dyskontującej $e^{-Y(t)}$ są skończone.

- **Stała stopa procentowa:**

Współczynnik dyskontujący jest ustalony.

Model wielostanowy i jego struktura probabilistyczna | Przepływy pieniężne | Funkcja dyskontująca

Wartość aktuarialna

Niech $\mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{\wp,j}(k) \mid X(t)=i\right)$ będzie *aktuarialną w momencie t wartością przepływu pieniężnego* $\wp$ płaconego w chwili *k*, gdy $X(k)=j$ oraz $X(t)=i$.

$$q_{ij}(t,k) = P\left(X(k)=j \mid X(t)=i\right)$$
$$q_{ij}(t,t+1) = q_{ij}(t)$$

Jeżeli $\wp \in \left\{p, \pi, \ddot{b}, b, d\right\}$, to

$$\mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{\wp,j}(k) \mid X(t)=i\right) = \begin{cases} \mathrm{E}\left(\upsilon(t,k)\right) q_{ij}(t,k) \wp_j(k) & dla \quad 0 \le t < k \\ \wp_j(k) & dla \quad 0 \le t = k \quad \wedge \quad i=j \\ 0 & dla \quad 0 \le t = k \quad \wedge \quad i \ne j \end{cases}$$

Jeżeli $\wp \in \left\{c_1, c_2, \ldots, c_N\right\}$, to

$$\mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{c_h,j}(k) \mid X(t)=i\right) =$$
$$\begin{cases} \mathrm{E}\left(\upsilon(t,k)\right) q_{ih}(t,k-1) q_{hj}(k-1,k) c_{hj}(k) & \text{dla} \quad h \in S \setminus \{j\} \quad \wedge \quad 0 \le t < k \\ q_{hj}(k-1,k) c_{hi}(k) & \text{dla} \quad h \in S \setminus \{j\} \quad \wedge \quad 0 \le t = k \quad \wedge \quad i=j \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Wartość aktuarialna

Model wielostanowy i jego struktura probabilistyczna | Przepływy pieniężne | Funkcja dyskontująca

Niech $\mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{\wp,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i\right)$ będzie aktuarialną w momencie t wartością sumy przepływów pieniężnych typu $\wp$ płaconych w przedziale czasu $[t_1,t_2)$, gdy $X(k)=j$ dla $t\in[t_1,t_2)$ oraz $X(t)=i$

Jeżeli $\wp\in\{p,\pi,\ddot{b}\}$, to $(0\le t\le t_1<t_2)$

$$\mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{\wp,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i\right)=\sum_{k=t_1}^{t_2-1}\mathrm{E}\left(\upsilon(t,k)\right)q_{ij}(t,k)\wp_j(k)$$

Jeżeli $\wp\in\{b,d\}$, to $(0\le t\le t_1<t_2)$

$$\mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{\wp,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i\right)=\sum_{k=t_1+1}^{t_2}\mathrm{E}\left(\upsilon(t,k)\right)q_{ij}(t,k)\wp_j(k)$$

Jeżeli $\wp\in\{c_1,c_2,\dots,c_N\}$, to $(0\le t\le t_1<t_2)$

$$\mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{c_h,j}(t_1,t_2)\,|\,X(t)=i\right)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=t_1+1}^{t_2}\mathrm{E}\left(\upsilon(t,k)\right)q_{ih}(t,k-1)q_{hj}(k-1,k)c_{hj}(k) & dla\quad h\in S\setminus\{j\}\\ 0 & dla\quad h=j\end{cases}$$

Strata prospektywna

$$ {}_tL = \sum_{\wp\in\{b,d,c_1,\dots,c_N\}} \sum_{j\in S} \sum_{k=t+1}^{n} \Upsilon_t^{\wp,j}(k) + \sum_{j\in S} \Upsilon_t^{\ddot{b},j}(t) - \sum_{\wp\in\{p,\pi\}} \sum_{j\in S} \sum_{k=t}^{n-1} \Upsilon_t^{\wp,j}(k) $$

Rezerwa prospektywna

$$ \begin{aligned} V_i(t) &= \mathrm{E}\left({}_tL \mid X(t)=i \right) \\ &= \sum_{\wp\in\{\ddot{b},b,d,c_1,\dots,c_N\}} \sum_{j\in S} \mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{\wp,j}(t,n) \mid X(t)=i \right) - \sum_{\wp\in\{p,\pi\}} \sum_{j\in S} \mathrm{E}\left(\Upsilon_t^{\wp,j}(t,n) \mid X(t)=i \right) \end{aligned} $$

Twierdzenie 1 (*odpowiednik równania różniczkowego Thiele'go w przypadku ubezpieczeń wielostanowych*)

Dla ubezpieczenia wielostanowego z modelem wielostanowym (S,T), jeżeli proces stopy procentowej $\{Y(t)\}$ jest procesem o niezależnych przyrostach, to wówczas

$$V_i(t)=\begin{cases} \mathrm{E}\big(\upsilon(t,t+1)\big)\sum_{j\in S} q_{ij}(t)\left(V_j(t+1)+\sum_{\wp\in\{b,d,c_i\}}\wp_j(t+1)\right)+\ddot{b}_i(t)-\sum_{\wp\in\{p,\pi\}}\wp_j(t) & dla \quad P(X(t)=i)>0 \\ 0 & dla \quad P(X(t)=i)=0 \end{cases}.$$

Uwaga 1

Jeżeli okresowe składki netto są płacone, gdy X(t) = 1 oraz rozważane są świadczenia płatne z góry, to wtedy *rezerwa składki netto* jest postaci

$$V_1(t)=\mathrm{E}\big(\upsilon(t,t+1)\big)\sum_{j\in S} q_{1j}(t)\left(V_j(t+1)+\sum_{\wp\in\{b,d,c_i\}}\wp_j(t+1)\right)-p_1(t).$$

Wniosek 1 (*podział składki netto*)
Niech dane będzie ubezpieczenie wielostanowe z modelem wielostanowym (S,T). Załóżmy, że składki okresowe płacone są, gdy $X(t)=1$ dla $t=0,1,2,\ldots,m\le n$ oraz proces stopy procentowej $\{Y(t)\}$ jest procesem o niezależnych przyrostach. Wtedy okresową składkę netto można przedstawić następująco

$$p_1(t)=p_1^s(t)+\sum_{j\in S\setminus\{1\}} p_1^{r_j}(t)$$

gdzie

$$p_1^s(t) \quad = \quad \mathrm{E}\big(\upsilon(t,t+1)\big)\left(V_1(t+1)+\sum_{\wp\in\{b,d,c_1\}}\wp_1(t+1)\right)+\ddot{b}_1(t)-V_1(t)$$

$$\tilde{p}_1^{r_j}(t) \quad = \quad \mathrm{E}\big(\upsilon(t,t+1)\big)q_{1j}(t)\left(\left(V_j(t+1)+\sum_{\wp\in\{b,d,c_1\}}\wp_j(t+1)\right)-\left(V_1(t+1)+\sum_{\wp\in\{b,d,c_1\}}\wp_1(t+1)\right)\right)$$

Wniosek 1 (*podział składki netto*)

$$p_1(t) = \underbrace{p_1^s(t)}_{\text{składka oszczędnościowa}} + \sum_{j \in S\setminus\{1\}} \underbrace{p_1^{r_j}(t)}_{\text{składka na ryzyko } j}$$

gdzie

$$p_1^s(t) = \mathrm{E}\big(\upsilon(t,t+1)\big)\left(V_1(t+1) + \sum_{\wp \in \{b,d,c_1\}} \wp_1(t+1)\right) + \ddot{b}_i(t) - V_1(t)$$

$$p_1^{r_j}(t) = \mathrm{E}\big(\upsilon(t,t+1)\big) q_{1j}(t) \underbrace{\left(\left(V_j(t+1) + \sum_{\wp \in \{b,d,c_1\}} \wp_j(t+1)\right) - \left(V_1(t+1) + \sum_{\wp \in \{b,d,c_1\}} \wp_1(t+1)\right)\right)}_{nar_j(t)}$$

$nar_j(t)$ **: *kwota netto podlegająca ryzyku j w t + 1-szej jednostce czasu***

(*net amount at risk*)

$$nar_j(t) = \left(\left(V_j(t+1) + \sum_{\wp \in \{b,d,c_1\}} \wp_j(t+1)\right) - \left(V_1(t+1) + \sum_{\wp \in \{b,d,c_1\}} \wp_1(t+1)\right)\right) \cdot \mathbf{1}_{\{q_{1j}(t)>0\}}$$

Wniosek 2 (*podział składki netto*)
Niech dane będzie ubezpieczenie wielostanowe z modelem wielostanowym $\left(S,T\right)$. Załóżmy, że składki okresowe płacone są, gdy $X(t)=1$ dla $t=0,1,2,\ldots,m\le n$ oraz proces stopy procentowej $\{Y(t)\}$ jest procesem o niezależnych przyrostach. Wtedy okresową składkę netto można przedstawić następująco

$$\tilde{p}_1(t)=\tilde{p}_1^s(t)+\sum_{j\in S\setminus\{1\}}\tilde{p}_1^{r_j}(t)$$

gdzie

$$\tilde{p}_1^s(t) = \mathrm{E}\left(\upsilon\left(t,t+1\right)\right)\left(V_1(t+1)+\sum_{\wp\in\{b,d,c_1\}}\wp_1(t+1)+\sum_{j\in S\setminus\{1\}}nar_j(t)\right)-V_1(t)$$

$$\tilde{p}_1^{r_j}(t) = \mathrm{E}\left(\upsilon\left(t,t+1\right)\right)\left(1-q_{1j}(t)\right)\left(-nar_j(t)\right)$$

MACIERZOWA REPREZENTACJA PODZIAŁU SKŁADKI

1. Weryfikacja modelu wielostanowego $\Rightarrow$ wprowadzenie *zmodyfikowanego modelu wielostanowego* (S^*, T^*)

Model (S, T) musi spełniać dwa warunki:

- wysokości przepływów pieniężnych typu $c_{ij}(k)$ nie zależą od stanu *i*

$$c_{ij}(k) = c_j(k),$$

- dla każdego stanu wszystkie przejścia są tego samego typu

cf lub ***nie cf***

MACIERZOWA REPREZENTACJA PODZIAŁU SKŁADKI

2. Określenie macierzy związanych z :

- Modelem wielostanowym i jego strukturą probabilistyczną,
- Przepływami pieniężnymi,
- Funkcją dyskontującą

Liczebność przestrzeni stanów S^*

$$\mathbf{S} = (1,1,\dots,1)^T \in \mathrm{R}^{N^*}$$

$$\mathbf{J}_i = \Big(0,0,\dots,0,\underbrace{1}_{i},0\dots,0\Big)^T \in \mathrm{R}^{N^*}$$

$$\mathbf{I}_{t+1} = \Big(0,0,\dots,0,\underbrace{1}_{t+1},0\dots,0\Big)^T \in \mathrm{R}^{n+1}$$

Model wielostanowy i jego struktura probabilistyczna

$$\mathbf{P}(0)=(1,0,0,\dots,0)^T\in\mathrm{R}^N$$

$$\mathbf{Q}(k)=\left[q_{ij}(k)\right]_{i,j=1}^{N}\in\mathrm{R}^{N\times N}$$

gdzie

$$q_{ij}(k)=\mathrm{P}(X(k+1)=j\mid X(k)=i)$$

$$\mathbf{P}(k)=(pr_1(k),pr_2(k),\dots,pr_N(k))^T\in\mathrm{R}^N$$

gdzie

$$pr_i(k)=\mathrm{P}(X(k)=i)$$

$$\mathbf{P}^T(k)=\mathbf{P}^T(0)\prod_{t=0}^{k-1}\mathbf{Q}(t)$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}^T(0)\\ \mathbf{P}^T(1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}^T(n)\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^{N\times(n+1)}$$

Przepływy pieniężne

$$\mathbf{C}_{in}=\left[cf_j^{in}(k)\right]\in\mathrm{R}^{N\times(n+1)}$$

$$\mathbf{C}_{out}=\left[cf_j^{out}(k)\right]\in\mathrm{R}^{N\times(n+1)}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_{in}+\mathbf{C}_{out}$$

$$\mathbf{C}_{in}=\mathbf{C}_{in^-}+\mathbf{C}_{in\_}$$

Dla funduszu strat ubezpieczyciela :

$$cf_j^{in}(k)=\ddot{b}_j(k)+b_j(k)+d_j(k)+c_j(k)$$

$$cf_j^{in^-}(k)=\ddot{b}_j(k)$$

$$cf_j^{in\_}(k)=b_j(k)+d_j(k)+c_j(k)$$

$$cf_j^{out}(k)=-(p_j(k)+\pi_j(k))$$

Funkcja dyskontująca

$$\mathbf{\Lambda}=\left[\lambda_{k_1k_2}\right]_{k_1,k_2=0}^{n}\in\mathrm{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\lambda_{k_1k_2}=\mathrm{E}\left(e^{-(Y(k_1)-Y(k_2))}\right)=\begin{cases}\mathrm{E}\left(\upsilon(k_2,k_1)\right) & \text{dla} \quad k_1>k_2\\ 1 & \text{dla} \quad k_1=k_2\\ \mathrm{E}\left(r(k_1,k_2)\right) & \text{dla} \quad k_1<k_2\end{cases}$$

Dla stalej stopy procentowej:

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & \upsilon & \upsilon^2 & \upsilon^3 & \cdots & \upsilon^n\\ \upsilon^{-1} & 1 & \upsilon & \upsilon^2 & \cdots & \upsilon^{n-1}\\ \upsilon^{-2} & \upsilon^{-1} & 1 & \upsilon & \cdots & \upsilon^{n-2}\\ \upsilon^{-3} & \upsilon^{-2} & \upsilon^{-1} & 1 & \cdots & \upsilon^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \upsilon^{-n} & \upsilon^{-(n-1)} & \upsilon^{-(n-2)} & \upsilon^{-(n-3)} & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Niech $\mathbf{V}(t)$ będzie **wektorem rezerw prospektywnych** w ustalonym momencie t dla wszystkich stanów przestrzeni stanów S:

$$\mathbf{V}(t) = (V_1(t), V_2(t), \ldots, V_N(t))^T$$

Wtedy macierz $\mathbf{V}$ **rezerw prospektywnych** określonych w całym okresie ubezpieczenia jest postaci:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^T(0) \\ \mathbf{V}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{V}^T(n) \end{pmatrix}$$

Uwaga

$$V_i^{\text{realne}}(t) = \begin{cases} V_i(t) & gdy \quad P(X(t) = i) > 0 \\ - & gdy \quad P(X(t) = i) = 0 \end{cases}$$

Twierdzenie 2 (*macierzowa reprezentacja wektora rezerw prospektywnych*)

Dla ubezpieczenia z modelem wielostanowym $\left(S^*, T^*\right)$ wektor rezerw prospektywnych w ustalonym momencie t jest następującej postaci

$$\mathbf{V}(t) = \left(\mathbf{C}_{out}^T + \mathbf{C}_{in^-}^T + \mathbf{F}^T(t, \mathbf{C})\boldsymbol{\Lambda}\right)\mathbf{I}_{t+1}$$

gdzie

$$\mathbf{F}^T(t, \mathbf{C}) = \sum_{k=t+1}^{n} \prod_{u=t}^{k-1} \mathbf{Q}(u)\mathbf{C}^T \mathbf{I}_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}^T$$

$\mathbf{F}^T(t, \mathbf{C})$ jest **macierzą prospektywnych średnich przepływów pieniężnych** liczonych pod warunkiem, że w momencie t trwania umowy ubezpieczenia proces $\left\{X^*(t)\right\}$ jest w określonym stanie

$$f_i(t, \mathbf{C}) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, t \\ \sum_{i \in S} \mathrm{P}(X^*(k) = j \mid X^*(t) = i) \cdot cf_j(k) & \text{dla} \quad k = t+1, t+2, \ldots, n \end{cases}$$

Twierdzenie 3 (*macierzowa reprezentacja odpowiednika równania różniczkowego Thiele'go w przypadku ubezpieczeń wielostanowych*)

Dla ubezpieczenia wielostanowego ze zmodyfikowanym modelem wielostanowym $\left(S^*, T^*\right)$, jeżeli proces stopy procentowej $\left\{Y(t)\right\}$ jest procesem o niezależnych przyrostach, to wówczas

$$\mathbf{V}(t) = \left(\mathbf{Q}(t)\left(\mathbf{V}(t+1) + \mathbf{C}_{in\_}^{T}\mathbf{I}_{t+2}\right)\mathbf{I}_{t+2}^{T}\mathbf{\Lambda}^{T} + \mathbf{C}_{out}^{T} + \mathbf{C}_{in^-}^{T}\right)\mathbf{I}_{t+1}$$

Niech $\mathbf{Nar} = \left[nar_j(t) \right] \in \mathrm{R}^{N^* \times (n+1)}$ będzie **macierzą kwot netto podlegających ryzyku**

$$nar_j(t) = \begin{cases} \left(V_j(t+1) + \sum_{\wp \in \{b,d,c_1\}} \wp_j(t+1) \right) - \left(V_1(t+1) + \sum_{\wp \in \{b,d,c_1\}} \wp_1(t+1) \right) & dla \quad q_{1j}(t) > 0 \\ 0 & dla \quad q_{1j}(t) = 0 \end{cases}$$

$$= \left(\mathbf{J}_j^T - \mathbf{J}_1^T \right) \left(\mathbf{V}^T + \mathbf{C}_{in\_}^T \right) \mathbf{I}_{t+2} \mathbf{1}_{\left\{ \mathbf{J}_1^T Q(t) \mathbf{J}_j > 0 \right\}}$$

Wniosek 3 (*macierzowa reprezentacja podziału składki*)

Niech dane będzie ubezpieczenie wielostanowe z modelem wielostanowym $\left(S^*, T^*\right)$. Załóżmy, że składki okresowe płacone są, gdy $X^*\left(t\right)=1$ dla $t=0,1,2,\ldots,m\le n$ oraz proces stopy procentowej $\left\{Y\left(t\right)\right\}$ jest procesem o niezależnych przyrostach. Wtedy okresową składkę netto można przedstawić następująco

$$p_1(t)=p_1^s(t)+\sum_{j\in S^*\setminus\{1\}} p_1^{r_j}(t)$$

gdzie

$$\begin{aligned} p_1^s(t) &= \mathbf{J}_1^T\left(\left(\mathbf{V}^T+\mathbf{C}_{in}^T\right)\mathbf{I}_{t+2}\mathbf{I}_{t+2}^T\mathbf{\Lambda}^T-\mathbf{V}^T\right)\mathbf{I}_{t+1} \\ p_1^{r_j}(t) &= \mathbf{J}_1^T\mathbf{Q}^*(t)\mathbf{J}_j\mathbf{J}_j^T\mathbf{Nar}^T\mathbf{I}_{t+1}\mathbf{I}_{t+1}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}_{t+2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{PP}=\begin{pmatrix} p_1^s(0) & p_1^{r_2}(0) & \cdots & p_1^{r_{N^*}}(0) \\ p_1^s(1) & p_1^{r_2}(1) & \cdots & p_1^{r_{N^*}}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^s(n) & p_1^{r_2}(n) & \cdots & p_1^{r_{N^*}}(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_1^s(t) &= \mathbf{I}_{t+1}^T\cdot\mathbf{PP}\cdot\mathbf{J}_1 \\ p_1^{r_j}(t) &= \mathbf{I}_{t+1}^T\cdot\mathbf{PP}\cdot\mathbf{J}_j \\ p_1(t) &= \mathbf{I}_{t+1}^T\cdot\mathbf{PP}\cdot\mathbf{S} \end{aligned}$$

Wniosek 4 (*macierzowa reprezentacja podziału składki*)
Niech dane będzie ubezpieczenie wielostanowe z modelem wielostanowym $\left(S^*, T^*\right)$. Załóżmy, że składki okresowe płacone są, gdy $X^*\left(t\right)=1$ dla $t=0,1,2,\dots,m\le n$ oraz proces stopy procentowej $\left\{Y\left(t\right)\right\}$ jest procesem o niezależnych przyrostach. Wtedy okresową składkę netto można przedstawić następująco

$$\tilde{p}_1(t)=\tilde{p}_1^s(t)+\sum_{j\in S^*\setminus\{1\}}\tilde{p}_1^{r_j}(t)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1^s(t) &= \left(\left(\mathbf{S}^T-\mathbf{J}_1^T\right)\mathbf{Nar}^T\mathbf{I}_{t+1}+\mathbf{J}_1^T\left(\mathbf{V}^T+\mathbf{C}_{in}^T\right)\mathbf{I}_{t+2}\right)\mathbf{I}_{t+2}^T\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{I}_{t+1}-\mathbf{J}_1^T\mathbf{V}^T\mathbf{I}_{t+1}\\ \tilde{p}_1^{r_j}(t) &= \left(1-\mathbf{J}_1^T\mathbf{Q}^*(t)\mathbf{J}_j\right)\mathbf{J}_j^T\left(-\mathbf{Nar}^T\right)\mathbf{I}_{t+1}\mathbf{I}_{t+1}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}_{t+2}\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{PP}}=\begin{pmatrix} p_1^s(0) & p_1^{r_2}(0) & \cdots & p_1^{r_{N^*}}(0)\\ p_1^s(1) & p_1^{r_2}(1) & \cdots & p_1^{r_{N^*}}(1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1^s(n) & p_1^{r_2}(n) & \cdots & p_1^{r_{N^*}}(n)\end{pmatrix}$$

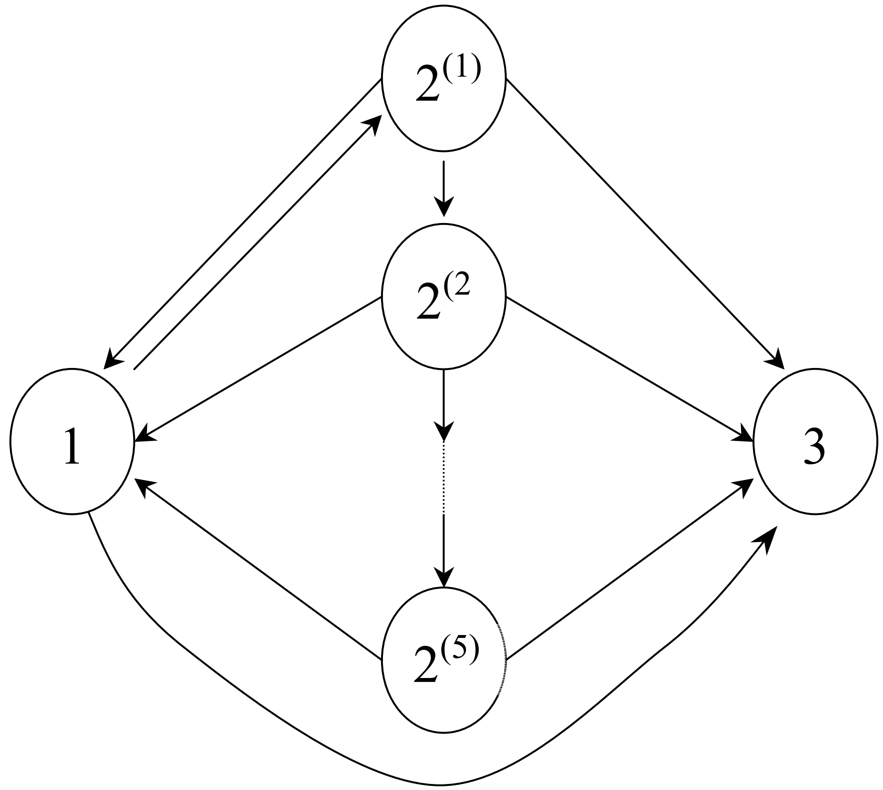
$$\begin{aligned}\tilde{p}_1^s(t) &= \mathbf{I}_{t+1}^T\cdot\tilde{\mathbf{PP}}\cdot\mathbf{J}_1\\ \tilde{p}_1^{r_j}(t) &= \mathbf{I}_{t+1}^T\cdot\tilde{\mathbf{PP}}\cdot\mathbf{J}_j\\ p_1(t) &= \mathbf{I}_{t+1}^T\cdot\tilde{\mathbf{PP}}\cdot\mathbf{S}\end{aligned}$$

PRZYKŁAD – UBEZPIECZENIE OD RYZYKA CIĘŻKIEJ CHOROBY (MODEL SZWEDZKI)

Wiek: $x = 20$

Okres ubezpieczenia : $n = 5$

Liczba stanów: $N = n + 2 = 7$



Przepływy pieniężne:

$$p_j(t) = \begin{cases} -p & dla \quad j=1 \;\; i \;\; 0 \le t \le 4 \\ 0 & poza\ tym \end{cases},$$

$$b_j(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad j = 2^{(1)} \;\; i \;\; 1 \le t \le 5 \\ & \quad j = 2^{(2)} \;\; i \;\; 2 \le t \le 5 \\ & \quad j = 2^{(3)} \;\; i \;\; 3 \le t \le 5 \\ & \quad j = 2^{(4)} \;\; i \;\; 4 \le t \le 5 \\ & \quad j = 2^{(5)} \;\; i \;\; t = 5 \\ 0 & poza\ tym \end{cases}$$

Macierze związane z rozkładem procesu $\left\{X^*(t)\right\}$:

$$\mathbf{Q}(0)=\begin{pmatrix} 0{,}99870657 & 0{,}00023343 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00106000 \\ 0{,}44980000 & 0 & 0{,}50343180 & 0 & 0 & 0 & 0{,}04676820 \\ 0{,}21240000 & 0 & 0 & 0{,}75809905 & 0 & 0 & 0{,}02950095 \\ 0{,}03620000 & 0 & 0 & 0 & 0{,}94479940 & 0 & 0{,}01900060 \\ 0{,}03780000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}94453280 & 0{,}01766720 \\ 0{,}03860000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}94439950 & 0{,}01700050 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Q}(1)$, $\mathbf{Q}(2)$, $\mathbf{Q}(3)$, $\mathbf{Q}(4)$, $\mathbf{P}(0)=(1,0,0,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{P}^T(k)=\mathbf{P}^T(0)\prod_{t=0}^{k-1}\mathbf{Q}(t)$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} \mathbf{P}^T(0) \\ \mathbf{P}^T(1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}^T(5) \end{pmatrix}$$

Macierz związana ze stopą procentową:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 1,0400 & 1,0816 & 1,1249 & 1,1699 & 1,2167 \\ 0,9615 & 1 & 1,0400 & 1,0816 & 1,1249 & 1,1699 \\ 0,9246 & 0,9615 & 1 & 1,0400 & 1,0816 & 1,1249 \\ 0,8890 & 0,9246 & 0,9615 & 1 & 1,0400 & 1,0816 \\ 0,8548 & 0,8890 & 0,9246 & 0,9615 & 1 & 1,0400 \\ 0,8219 & 0,8548 & 0,8890 & 0,9246 & 0,9615 & 1 \end{pmatrix}$$

Roczna stopa procentowa: 4%

Macierze przepływów pieniężnych dla *funduszu strat ubezpieczyciela*:

$$\mathbf{C}_{in} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stala okresowa skladka netto:

$$\mathbf{C}_{out} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{\mathbf{S}^T Diag\left(\mathbf{C}_{in}\mathbf{D}^T\right)\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1^T\mathbf{\Lambda}^T\left[\mathbf{I} - \sum_{k=m+1}^{n+1}\mathbf{I}_k\mathbf{I}_k^T\right]\mathbf{D}\mathbf{I}_1} = 0{,}000494$$

m = n = 5

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix} 0 & 0{,}26599 & 0{,}49661 & 0{,}61867 & 0{,}61841 & 0{,}61832 & 0 \\ -0{,}00007 & 1{,}48433 & 0{,}54954 & 0{,}68130 & 0{,}68101 & 0{,}68092 & 0 \\ -0{,}00013 & 1{,}20885 & 2{,}01341 & 0{,}75017 & 0{,}74985 & 0{,}74974 & 0 \\ -0{,}00017 & 0{,}88854 & 1{,}41243 & 1{,}73472 & 0{,}82553 & 0{,}82541 & 0 \\ -0{,}00015 & 0{,}51817 & 0{,}74356 & 0{,}90897 & 0{,}90872 & 0{,}90859 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}(t)=\left(\mathbf{C}_{out}^{T}+\mathbf{F}^{T}(t,\mathbf{C})\boldsymbol{\Lambda}\right)\mathbf{I}_{t+1}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}99871 & 0{,}00023 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00106 \\ 0{,}99749 & 0{,}00026 & 0{,}00012 & 0 & 0 & 0 & 0{,}00213 \\ 0{,}99628 & 0{,}00029 & 0{,}00014 & 0{,}00009 & 0 & 0 & 0{,}00320 \\ 0{,}99505 & 0{,}00032 & 0{,}00015 & 0{,}00010 & 0{,}00009 & 0 & 0{,}00428 \\ 0{,}99381 & 0{,}00036 & 0{,}00017 & 0{,}00012 & 0{,}00010 & 0{,}00008 & 0{,}00536 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}^{real}=\begin{pmatrix} 0 & - & - & - & - & - & - \\ -0{,}00007 & 1{,}48433 & - & - & - & - & 0 \\ -0{,}00013 & 1{,}20885 & 2{,}01341 & - & - & - & 0 \\ -0{,}00017 & 0{,}88854 & 1{,}41243 & 1{,}73472 & - & - & 0 \\ -0{,}00015 & 0{,}51817 & 0{,}74356 & 0{,}90897 & 0{,}90872 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_i^{real}(t)=\begin{cases} \mathbf{I}_{t+1}^{T}\mathbf{V}\mathbf{J}_i & gdy \quad \mathbf{I}_{t+1}^{T}\mathbf{D}\mathbf{J}_i>0 \\ - & gdy \quad \mathbf{I}_{t+1}^{T}\mathbf{D}\mathbf{J}_i=0 \end{cases}$$

m=5

okresowa składka netto: p= 0.0004940

$$\mathbf{V}^{real} = \begin{pmatrix} 0 & - & - & - & - & - & - \\ -0{,}00007 & 1{,}48433 & - & - & - & - & 0 \\ -0{,}00013 & 1{,}20885 & 2{,}01341 & - & - & - & 0 \\ -0{,}00017 & 0{,}88854 & 1{,}41243 & 1{,}73472 & - & - & 0 \\ -0{,}00015 & 0{,}51817 & 0{,}74356 & 0{,}90897 & 0{,}90872 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Nar} = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}484399 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000066 \\ 0 & 2{,}208976 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000129 \\ 0 & 1{,}888703 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000167 \\ 0 & 1{,}518321 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000149 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{PP} = \begin{pmatrix} -0{,}000064 & 0{,}000558 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000001 \\ -0{,}000058 & 0{,}000552 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000001 \\ -0{,}000032 & 0{,}000525 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000002 \\ 0{,}000024 & 0{,}000470 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000002 \\ 0{,}000149 & 0{,}000345 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

m=3

okresowa składka netto: p= 0.0007916

$$\mathbf{V}^{real} = \begin{pmatrix} 0 & - & - & - & - & - & - \\ 0{,}00024 & 1{,}48470 & - & - & - & - & 0 \\ 0{,}00050 & 1{,}20929 & 2{,}01361 & - & - & - & 0 \\ 0{,}00080 & 0{,}88873 & 1{,}41252 & 1{,}73474 & - & - & 0 \\ 0{,}00034 & 0{,}51817 & 0{,}74356 & 0{,}90897 & 0{,}90872 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Nar} = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}484455 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}000244 \\ 0 & 2{,}208790 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}000503 \\ 0 & 1{,}887934 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}000801 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{PP} = \begin{pmatrix} 0{,}000234 & 0{,}000558 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0000003 \\ 0{,}000240 & 0{,}000552 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0000005 \\ 0{,}000267 & 0{,}000525 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0000008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$