

# Składki zaufania w modelach ze zmiennym w czasie parametrem ryzyka

Aleksandra Chowańska i Elżbieta Ferenstein

Politechnika Warszawska

Ogólnopolska Konferencja Naukowa  
Zagadnienia Aktuariale - Teoria i Praktyka  
Warszawa 2011

# Plan prezentacji

Klasyczny model Bühlmann'a. Propozycje modyfikacji

Składka Bayesowska i indywidualna dla modelu z przełączeniem

Model z przełączeniem dla rodziny rozkładów wykładniczych

Składka zaufania dla modelu z przełączeniem

# Plan prezentacji

Klasyczny model Bühlmann'a. Propozycje modyfikacji

Składka Bayesowska i indywidualna dla modelu z przełączeniem

Model z przełączeniem dla rodziny rozkładów wykładniczych

Składka zaufania dla modelu z przełączeniem

# Plan prezentacji

Klasyczny model Bühlmann'a. Propozycje modyfikacji

Składka Bayesowska i indywidualna dla modelu z przełączeniem

Model z przełączeniem dla rodziny rozkładów wykładniczych

Składka zaufania dla modelu z przełączeniem

# Plan prezentacji

Klasyczny model Bühlmann'a. Propozycje modyfikacji

Składka Bayesowska i indywidualna dla modelu z przełączeniem

Model z przełączeniem dla rodziny rozkładów wykładniczych

Składka zaufania dla modelu z przełączeniem

# Klasyczny model Bühlmann'a

## Założenia klasycznego modelu Bühlmann'a

- ▶ określamy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,
- ▶ rozważamy zmienne losowe  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  określone na przestrzeni probabilistycznej, zakładamy, że w chwili  $n$  znamy realizacje zmiennych losowych  $X_j$  do chwili  $n$ ,
- ▶ na rozważanej przestrzeni mamy określoną mierzalną zmienną losową  $\Theta$ ,
- ▶ obserwujemy  $I$  niezależnych kontraktów scharakteryzowanych przez wektory losowe :
  - ▶  $\forall i=1, \dots, I$   $(\Theta_i, \underline{X}_i, X_{i,n+1})$ , gdzie  $\Theta_i$  jest nieobserwowalnym parametrem ryzyka,  $\underline{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$  jest wektorem obserwacji cechy  $i$ -tego ryzyka,  $X_{n+1}$  wielkość cechy w roku  $n+1$  jest nieobserwowalna,
  - ▶  $\forall i=1, \dots, I$   $X_{i1}, \dots, X_{in}$  są warunkowo niezależne pod warunkiem  $\Theta_i$ ,
- ▶  $\Theta_1, \dots, \Theta_I$  są iid..

# Klasyczny model Bühlmann'a

## Założenia klasycznego modelu Bühlmann'a

- ▶ określamy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,
- ▶ rozważamy zmienne losowe  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  określone na przestrzeni probabilistycznej, zakładamy, że w chwili  $n$  znamy realizacje zmiennych losowych  $X_j$  do chwili  $n$ ,
- ▶ na rozważanej przestrzeni mamy określoną mierzalną zmienną losową  $\Theta$ ,
- ▶ obserwujemy  $I$  niezależnych kontraktów scharakteryzowanych przez wektory losowe :
  - ▶  $\forall i=1, \dots, I$   $(\Theta_i, \underline{X}_i, X_{i,n+1})$ , gdzie  $\Theta_i$  jest nieobserwowalnym parametrem ryzyka,  $\underline{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$  jest wektorem obserwacji cechy  $i$ -tego ryzyka,  $X_{i,n+1}$  wielkość cechy w roku  $n+1$  jest nieobserwowalna,
  - ▶  $\forall i=1, \dots, I$   $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$  są warunkowo niezależne pod warunkiem  $\Theta_i$ ,
- ▶  $\Theta_1, \dots, \Theta_I$  są iid..

# Klasyczny model Bühlmann'a

## Założenia klasycznego modelu Bühlmann'a

- ▶ określamy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,
- ▶ rozważamy zmienne losowe  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  określone na przestrzeni probabilistycznej, zakładamy, że w chwili  $n$  znamy realizacje zmiennych losowych  $X_j$  do chwili  $n$ ,
- ▶ na rozważanej przestrzeni mamy określoną mierzalną zmienną losową  $\Theta$ ,
- ▶ obserwujemy  $I$  niezależnych kontraktów scharakteryzowanych przez wektory losowe :
  - ▶  $\forall i=1, \dots, I$   $(\Theta_i, \underline{X}_i, X_{i,n+1})$ , gdzie  $\Theta_i$  jest nieobserwowalnym parametrem ryzyka,  $\underline{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$  jest wektorem obserwacji cechy  $i$ -tego ryzyka,  $X_{i,n+1}$  wielkość cechy w roku  $n+1$  jest nieobserwowalna,
  - ▶  $\forall i=1, \dots, I$   $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$  są warunkowo niezależne pod warunkiem  $\Theta_i$ ,
- ▶  $\Theta_1, \dots, \Theta_I$  są iid..

# Klasyczny model Bühlmann'a

## Założenia klasycznego modelu Bühlmann'a

- ▶ określamy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,
- ▶ rozważamy zmienne losowe  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  określone na przestrzeni probabilistycznej, zakładamy, że w chwili  $n$  znamy realizacje zmiennych losowych  $X_j$  do chwili  $n$ ,
- ▶ na rozważanej przestrzeni mamy określoną mierzalną zmienną losową  $\Theta$ ,
- ▶ obserwujemy  $I$  niezależnych kontraktów scharakteryzowanych przez wektory losowe :
  - ▶  $\forall_{i=1, \dots, I} (\Theta_i, \underline{X}_i, X_{i,n+1})$ , gdzie  $\Theta_i$  jest nieobserwowalnym parametrem ryzyka,  $\underline{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$  jest wektorem obserwacji cechy  $i$ -tego ryzyka,  $X_{n+1}$  wielkość cechy w roku  $n+1$  jest nieobserwowalna,
  - ▶  $\forall_{i=1, \dots, I} X_{i1}, \dots, X_{in}$  są warunkowo niezależne pod warunkiem  $\Theta_i$ ,
- ▶  $\Theta_1, \dots, \Theta_I$  są iid..

# Klasyczny model Bühlmann'a

## Założenia klasycznego modelu Bühlmann'a

- ▶ określamy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,
- ▶ rozważamy zmienne losowe  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  określone na przestrzeni probabilistycznej, zakładamy, że w chwili  $n$  znamy realizacje zmiennych losowych  $X_j$  do chwili  $n$ ,
- ▶ na rozważanej przestrzeni mamy określoną mierzalną zmienną losową  $\Theta$ ,
- ▶ obserwujemy  $I$  niezależnych kontraktów scharakteryzowanych przez wektory losowe :
  - ▶  $\forall_{i=1, \dots, I} (\Theta_i, \underline{X}_i, X_{i,n+1})$ , gdzie  $\Theta_i$  jest nieobserwowalnym parametrem ryzyka,  $\underline{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$  jest wektorem obserwacji cechy  $i$ -tego ryzyka,  $X_{n+1}$  wielkość cechy w roku  $n+1$  jest nieobserwowalna,
  - ▶  $\forall_{i=1, \dots, I} X_{i1}, \dots, X_{in}$  są warunkowo niezależne pod warunkiem  $\Theta_i$ ,
- ▶  $\Theta_1, \dots, \Theta_I$  są iid..

# Klasyczny model Bühlmann'a

## Założenia klasycznego modelu Bühlmann'a

- ▶ określamy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,
- ▶ rozważamy zmienne losowe  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  określone na przestrzeni probabilistycznej, zakładamy, że w chwili  $n$  znamy realizacje zmiennych losowych  $X_j$  do chwili  $n$ ,
- ▶ na rozważanej przestrzeni mamy określoną mierzalną zmienną losową  $\Theta$ ,
- ▶ obserwujemy  $I$  niezależnych kontraktów scharakteryzowanych przez wektory losowe :
  - ▶  $\forall_{i=1, \dots, I} (\Theta_i, \underline{X}_i, X_{i,n+1})$ , gdzie  $\Theta_i$  jest nieobserwowalnym parametrem ryzyka,  $\underline{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$  jest wektorem obserwacji cechy  $i$ -tego ryzyka,  $X_{n+1}$  wielkość cechy w roku  $n + 1$  jest nieobserwowalna,
  - ▶  $\forall_{i=1, \dots, I} X_{i1}, \dots, X_{in}$  są warunkowo niezależne pod warunkiem  $\Theta_i$ ,
- ▶  $\Theta_1, \dots, \Theta_I$  są iid..

# Klasyczny model Bühlmann'a

## Założenia klasycznego modelu Bühlmann'a

- ▶ określamy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,
- ▶ rozważamy zmienne losowe  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  określone na przestrzeni probabilistycznej, zakładamy, że w chwili  $n$  znamy realizacje zmiennych losowych  $X_j$  do chwili  $n$ ,
- ▶ na rozważanej przestrzeni mamy określoną mierzalną zmienną losową  $\Theta$ ,
- ▶ obserwujemy  $I$  niezależnych kontraktów scharakteryzowanych przez wektory losowe :
  - ▶  $\forall_{i=1, \dots, I} (\Theta_i, \underline{X}_i, X_{i,n+1})$ , gdzie  $\Theta_i$  jest nieobserwowalnym parametrem ryzyka,  $\underline{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$  jest wektorem obserwacji cechy  $i$ -tego ryzyka,  $X_{n+1}$  wielkość cechy w roku  $n+1$  jest nieobserwowalna,
  - ▶  $\forall_{i=1, \dots, I} X_{i1}, \dots, X_{in}$  są warunkowo niezależne pod warunkiem  $\Theta_i$ ,
- ▶  $\Theta_1, \dots, \Theta_I$  są iid..

## Modyfikacje

### Modele z przełączeniem. Zmiana parametru ryzyka w losowej chwili $N$

- ▶ Parametr ryzyka w chwili  $j$  określony jest następująco

$$\Theta_j = (\Lambda_{C_j}, C_j, N)$$

- ▶ zmienna losowa  $N$  ma dystrybuantę  $G$
- ▶  $C_j$  jest określone następująco

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ 2 & \text{jeżeli } N \leq j, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_{C_j}$  określona jest następująco

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_2 & \text{jeżeli } C_j = 2, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \Lambda_2$  są niezależne o dystrybuancie  $U_1, U_2$ , odpowiednio.

# Modyfikacje

## Modele z przełączeniem. Zmiana parametru ryzyka w losowej chwili $N$

- ▶ Parametr ryzyka w chwili  $j$  określony jest następująco  
 $\Theta_j = (\Lambda_{C_j}, C_j, N)$ 
  - ▶ zmienna losowa  $N$  ma dystrybuantę  $G$
  - ▶  $C_j$  jest określone następująco

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ 2 & \text{jeżeli } N \leq j, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_{C_j}$  określona jest następująco

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_2 & \text{jeżeli } C_j = 2, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \Lambda_2$  są niezależne o dystrybuancie  $U_1, U_2$ , odpowiednio.

## Modyfikacje

### Modele z przełączeniem. Zmiana parametru ryzyka w losowej chwili $N$

- ▶ Parametr ryzyka w chwili  $j$  określony jest następująco  
 $\Theta_j = (\Lambda_{C_j}, C_j, N)$ 
  - ▶ zmienna losowa  $N$  ma dystrybuantę  $G$
  - ▶  $C_j$  jest określone następująco

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ 2 & \text{jeżeli } N \leq j, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_{C_j}$  określona jest następująco

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_2 & \text{jeżeli } C_j = 2, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \Lambda_2$  są niezależne o dystrybuancie  $U_1, U_2$ , odpowiednio.

# Modyfikacje

## Modele z przełączeniem. Zmiana parametru ryzyka w losowej chwili $N$

- ▶ Parametr ryzyka w chwili  $j$  określony jest następująco  
 $\Theta_j = (\Lambda_{C_j}, C_j, N)$ 
  - ▶ zmienna losowa  $N$  ma dystrybuantę  $G$
  - ▶  $C_j$  jest określone następująco

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ 2 & \text{jeżeli } N \leq j, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_{C_j}$  określona jest następująco

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_2 & \text{jeżeli } C_j = 2, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \Lambda_2$  są niezależne o dystrybuancie  $U_1, U_2$ , odpowiednio.

## Modyfikacje

### Modele z przełączeniem. Zmiana parametru ryzyka w losowej chwili $N$

- ▶ Parametr ryzyka w chwili  $j$  określony jest następująco  
 $\Theta_j = (\Lambda_{C_j}, C_j, N)$ 
  - ▶ zmienna losowa  $N$  ma dystrybuantę  $G$
  - ▶  $C_j$  jest określone następująco

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ 2 & \text{jeżeli } N \leq j, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_{C_j}$  określona jest następująco

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_2 & \text{jeżeli } C_j = 2, \end{cases}$$

- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \Lambda_2$  są niezależne o dystrybuancie  $U_1, U_2$ , odpowiednio.

# Modyfikacje

Modele z przełączeniem. Zmiana parametru ryzyka w losowej chwili  $N$

- ▶ warunkowy rozkład zmiennej losowej  $X_j$  określony jest następująco:

$$P(X_j \leq x_j \mid \lambda_1, \lambda_2, k) = \begin{cases} F_1(x_j \mid \lambda_1) & \text{jeżeli } j < k, \\ F_2(x_j \mid \lambda_2) & \text{jeżeli } j \geq k. \end{cases}$$

# Modyfikacje

## Model z przełączeniem propozycja II

- ▶ Modyfikujemy wcześniejszy model przez określenie na przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  zmiennej losowej  $\rho$  przyjmującej wartości  $j = 1, 2, \dots, d$  oraz zmiennych losowych  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$ ,
- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$  są niezależne,
- ▶  $C_j$  jest związana ze zmienną losową  $\rho$  oraz zmienną losową  $N$  poprzez następującą zależność

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ i & \text{jeżeli } N \leq j \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \rho = i \quad \text{dla } i = 2 \dots d.$$

- ▶ Powyższe zależności implikują postać zmiennej losowej  $\Lambda_{C_j}$

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_i & \text{jeżeli } C_j = i \text{ dla } i = 2 \dots d. \end{cases}$$

# Modyfikacje

## Model z przełączeniem propozycja II

- ▶ Modyfikujemy wcześniejszy model przez określenie na przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  zmiennej losowej  $\rho$  przyjmującej wartości  $j = 1, 2, \dots, d$  oraz zmiennych losowych  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$ ,
- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$  są niezależne,
- ▶  $C_j$  jest związana ze zmienną losową  $\rho$  oraz zmienną losową  $N$  poprzez następującą zależność

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ i & \text{jeżeli } N \leq j \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \rho = i \quad \text{dla } i = 2 \dots d.$$

- ▶ Powyższe zależności implikują postać zmiennej losowej  $\Lambda_{C_j}$

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_i & \text{jeżeli } C_j = i \text{ dla } i = 2 \dots d. \end{cases}$$

# Modyfikacje

## Model z przełączeniem propozycja II

- ▶ Modyfikujemy wcześniejszy model przez określenie na przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  zmiennej losowej  $\rho$  przyjmującej wartości  $j = 1, 2, \dots, d$  oraz zmiennych losowych  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$ ,
- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$  są niezależne,
- ▶  $C_j$  jest związana ze zmienną losową  $\rho$  oraz zmienną losową  $N$  poprzez następującą zależność

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ i & \text{jeżeli } N \leq j \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \rho = i \quad \text{dla } i = 2 \dots d.$$

- ▶ Powyższe zależności implikują postać zmiennej losowej  $\Lambda_{C_j}$

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_i & \text{jeżeli } C_j = i \text{ dla } i = 2 \dots d. \end{cases}$$

# Modyfikacje

## Model z przełączeniem propozycja II

- ▶ Modyfikujemy wcześniejszy model przez określenie na przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  zmiennej losowej  $\rho$  przyjmującej wartości  $j = 1, 2, \dots, d$  oraz zmiennych losowych  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$ ,
- ▶ Zmienne losowe  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_d$  są niezależne,
- ▶  $C_j$  jest związana ze zmienną losową  $\rho$  oraz zmienną losową  $N$  poprzez następującą zależność

$$C_j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } N > j, \\ i & \text{jeżeli } N \leq j \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \rho = i \quad \text{dla } i = 2 \dots d.$$

- ▶ Powyższe zależności implikują postać zmiennej losowej  $\Lambda_{C_j}$

$$\Lambda_{C_j} = \begin{cases} \Lambda_1 & \text{jeżeli } C_j = 1, \\ \Lambda_i & \text{jeżeli } C_j = i \text{ dla } i = 2 \dots d. \end{cases}$$

# Modyfikacje

## Model z wykorzystaniem łańcucha Markowa

- ▶ Wprowadzamy  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  łańcuch Markowa, o skończonej liczbie stanów w przeliczalnym zbiorze  $S$  o macierzy przejścia  $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ ,
- ▶ Przyjmujemy, że rozważany łańcuch ma stany  $1, \dots, k$ .
- ▶ zakładamy, że łańcuch  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  ma rozkład stacjonarny
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_{C_j}$  w chwili  $j$  określona jest następująco:

$$\Lambda_{C_j} = \Lambda_m \quad \text{jeżeli } C_j = m \quad \text{dla } m = 1, \dots, k$$

- ▶ zmienne losowe  $\Lambda_1 \dots \Lambda_k$  są niezależne

# Modyfikacje

## Model z wykorzystaniem łańcucha Markowa

- ▶ Wprowadzamy  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  łańcuch Markowa, o skończonej liczbie stanów w przeliczalnym zbiorze  $S$  o macierzy przejścia  $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ ,
- ▶ Przyjmujemy, że rozważany łańcuch ma stany  $1, \dots, k$ .
- ▶ zakładamy, że łańcuch  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  ma rozkład stacjonarny
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_{C_j}$  w chwili  $j$  określona jest następująco:

$$\Lambda_{C_j} = \Lambda_m \quad \text{jeżeli } C_j = m \quad \text{dla } m = 1, \dots, k$$

- ▶ zmienne losowe  $\Lambda_1 \dots \Lambda_k$  są niezależne

# Modyfikacje

## Model z wykorzystaniem łańcucha Markowa

- ▶ Wprowadzamy  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  łańcuch Markowa, o skończonej liczbie stanów w przeliczalnym zbiorze  $S$  o macierzy przejścia  $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ ,
- ▶ Przyjmujemy, że rozważany łańcuch ma stany  $1, \dots, k$ .
- ▶ zakładamy, że łańcuch  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  ma rozkład stacjonarny
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_{C_j}$  w chwili  $j$  określona jest następująco:

$$\Lambda_{C_j} = \Lambda_m \quad \text{jeżeli } C_j = m \quad \text{dla } m = 1, \dots, k$$

- ▶ zmienne losowe  $\Lambda_1 \dots \Lambda_k$  są niezależne

# Modyfikacje

## Model z wykorzystaniem łańcucha Markowa

- ▶ Wprowadzamy  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  łańcuch Markowa, o skończonej liczbie stanów w przeliczalnym zbiorze  $S$  o macierzy przejścia  $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ ,
- ▶ Przyjmujemy, że rozważany łańcuch ma stany  $1, \dots, k$ .
- ▶ zakładamy, że łańcuch  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  ma rozkład stacjonarny
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_{C_j}$  w chwili  $j$  określona jest następująco:

$$\Lambda_{C_j} = \Lambda_m \quad \text{jeżeli } C_j = m \quad \text{dla } m = 1, \dots, k$$

- ▶ zmienne losowe  $\Lambda_1 \dots \Lambda_k$  są niezależne

# Modyfikacje

## Model z wykorzystaniem podwójnie stochastycznego łańcucha Markowa

Modyfikacja modelu z wykorzystaniem łańcucha Markowa, poprzez zastąpienie  $(C_j)_{j=1}^{n+1}$  podwójnie stochastycznym łańcuchem Markowa. Parametr ryzyka  $\Theta_j$  w chwili  $j$  przedstawia się jako

$$\Theta_j = (C_j, \Lambda_{C_j}).$$

Podwójnie stochastyczny łańcuch Markowa umożliwia nam modelowanie parametru ryzyka jako procesu zależnego od środowiska, które jest kształtowane przez nieobserwowalne czynniki, na które mają wpływ obserwowalne, zewnętrzne czynniki.

## Składka Indywidualna

Przełączenia nastąpiło w losowej chwili  $N = k$ , gdzie  $k = 1, \dots, n + 1$ .

- ▶ Zmienną losową  $X_j$  (wypłata) dla  $j = 1, \dots, n$  przedstawiamy jako:

$$X_j = X'_j I_{\{k > j\}} + X''_j I_{\{k \leq j\}}$$

- ▶ składka indywidualna ma postać:

$$\begin{aligned} p^{ind} &= E(X_{n+1} \mid \Theta_{n+1}) \\ &= I(N > n + 1)E(X'_{n+1} \mid \Lambda_1) + I(N \leq n + 1)E(X''_{n+1} \mid \Lambda_2) = \\ &= I(N > n + 1)\mu_1(\Lambda_1) + I(N \leq n + 1)\mu_2(\Lambda_2) \\ &= \mu(\Theta_{n+1}) \end{aligned}$$

## Składka Indywidualna

Przełączenia nastąpiło w losowej chwili  $N = k$ , gdzie  $k = 1, \dots, n + 1$ .

- ▶ Zmienną losową  $X_j$  (wypłata) dla  $j = 1, \dots, n$  przedstawiamy jako:

$$X_j = X'_j I_{\{k > j\}} + X''_j I_{\{k \leq j\}}$$

- ▶ składka indywidualna ma postać:

$$\begin{aligned} p^{ind} &= E(X_{n+1} \mid \Theta_{n+1}) \\ &= I(N > n + 1)E(X'_{n+1} \mid \Lambda_1) + I(N \leq n + 1)E(X''_{n+1} \mid \Lambda_2) = \\ &= I(N > n + 1)\mu_1(\Lambda_1) + I(N \leq n + 1)\mu_2(\Lambda_2) \\ &= \mu(\Theta_{n+1}) \end{aligned}$$

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶ składka Bayesowska ma postać:

$$\begin{aligned}P^B &= E(\mu(\Theta_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n) \\&= E(I(N > n+1)\mu_1(\Lambda_1) + I(N \leq n+1)\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$

- ▶ wprowadzam następujące oznaczenia:

- ▶  $\xi_{n+1} := I(N > n+1)$ ,  $\xi'_{n+1} := I(N \leq n+1)$ ,
- ▶  $x_{r,n} = (x_{r,1}, \dots, x_{r,n})$ - wektor obserwacji cechy w okresach  $r, \dots, n$ ,
- ▶  $f_X(x_{1,n})$ - gęstość brzegowa rozkładu cechy za cały okres obserwacji,

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶ składka Bayesowska ma postać:

$$\begin{aligned}P^B &= E(\mu(\Theta_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n) \\&= E(I(N > n+1)\mu_1(\Lambda_1) + I(N \leq n+1)\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$

- ▶ wprowadzam następujące oznaczenia:

- ▶  $\xi_{n+1} = I(N > n+1)$ ,  $\xi'_{n+1} = I(N \leq n+1)$ ,
- ▶  $x_{r,n} = (x_r, \dots, x_n)$ - wektor obserwacji cechy w okresach  $r, \dots, n$ ,
- ▶  $f_X(x_{1,n})$ - gęstość brzegowa rozkładu cechy za cały okres obserwacji,

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶ składka Bayesowska ma postać:

$$\begin{aligned}P^B &= E(\mu(\Theta_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n) \\&= E(I(N > n+1)\mu_1(\Lambda_1) + I(N \leq n+1)\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$

- ▶ wprowadzam następujące oznaczenia:

- ▶  $\xi_{n+1} = I(N > n+1)$ ,  $\xi'_{n+1} = I(N \leq n+1)$ ,
- ▶  $x_{r,n} = (x_r, \dots, x_n)$ - wektor obserwacji cechy w okresach  $r, \dots, n$ ,
- ▶  $f_X(x_{1,n})$ - gęstość brzegowa rozkładu cechy za cały okres obserwacji,

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶ składka Bayesowska ma postać:

$$\begin{aligned}P^B &= E(\mu(\Theta_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n) \\&= E(I(N > n+1)\mu_1(\Lambda_1) + I(N \leq n+1)\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$

- ▶ wprowadzam następujące oznaczenia:

- ▶  $\xi_{n+1} = I(N > n+1)$ ,  $\xi'_{n+1} = I(N \leq n+1)$ ,
- ▶  $x_{r,n} = (x_r, \dots, x_n)$ - wektor obserwacji cechy w okresach  $r, \dots, n$ ,
- ▶  $f_X(x_{1,n})$ - gęstość brzegowa rozkładu cechy za cały okres obserwacji,

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶ składka Bayesowska ma postać:

$$\begin{aligned}P^B &= E(\mu(\Theta_{n+1}) \mid X_1, \dots, X_n) \\&= E(I(N > n+1)\mu_1(\Lambda_1) + I(N \leq n+1)\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)\end{aligned}$$

- ▶ wprowadzam następujące oznaczenia:

- ▶  $\xi_{n+1} = I(N > n+1)$ ,  $\xi'_{n+1} = I(N \leq n+1)$ ,
- ▶  $x_{r,n} = (x_r, \dots, x_n)$ - wektor obserwacji cechy w okresach  $r, \dots, n$ ,
- ▶  $f_X(x_{1,n})$ - gęstość brzegowa rozkładu cechy za cały okres obserwacji,

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶  $f_1(x_{1,k-1})$  gęstość brzegowa rozkładu cechy dla  $k-1$  obserwacji w modelu przed przełączeniem,  $f_2(x_{k,n})$  gęstość brzegowa rozkładu cechy dla obserwacji od  $k$  do  $n$  w modelu z przełączeniem,
- ▶  $f_1(x_{1,k-1} \mid \lambda_1)$  gęstość warunkowa pod warunkiem  $\Lambda_1 = \lambda_1$  w modelu przed przełączeniem,  $f_2(x_{k,n} \mid \lambda_2)$  gęstość warunkowa pod warunkiem  $\Lambda_2 = \lambda_2$  w modelu z przełączeniem.
- ▶ Konieczność wyznaczenia warunkowych wartości oczekiwanych dla rozkładów mieszanych.
- ▶ Wyznaczę

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}): \quad = \quad E(\xi_{n+1}\mu_1(\Lambda_1) \mid X_1, \dots, X_n)$$

$$g_2(\underline{\mathbf{X}}): \quad = \quad E(\xi'_{n+1}\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)$$

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶  $f_1(x_{1,k-1})$  gęstość brzegowa rozkładu cechy dla  $k-1$  obserwacji w modelu przed przełączeniem,  $f_2(x_{k,n})$  gęstość brzegowa rozkładu cechy dla obserwacji od  $k$  do  $n$  w modelu z przełączeniem,
- ▶  $f_1(x_{1,k-1} \mid \lambda_1)$  gęstość warunkowa pod warunkiem  $\Lambda_1 = \lambda_1$  w modelu przed przełączeniem,  $f_2(x_{k,n} \mid \lambda_2)$  gęstość warunkowa pod warunkiem  $\Lambda_2 = \lambda_2$  w modelu z przełączeniem.
- ▶ Konieczność wyznaczenia warunkowych wartości oczekiwanych dla rozkładów mieszanych.
- ▶ Wyznaczę

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}): \quad = \quad E(\xi_{n+1}\mu_1(\Lambda_1) \mid X_1, \dots, X_n)$$

$$g_2(\underline{\mathbf{X}}): \quad = \quad E(\xi'_{n+1}\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)$$

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶  $f_1(x_{1,k-1})$  gęstość brzegowa rozkładu cechy dla  $k-1$  obserwacji w modelu przed przełączeniem,  $f_2(x_{k,n})$  gęstość brzegowa rozkładu cechy dla obserwacji od  $k$  do  $n$  w modelu z przełączeniem,
- ▶  $f_1(x_{1,k-1} \mid \lambda_1)$  gęstość warunkowa pod warunkiem  $\Lambda_1 = \lambda_1$  w modelu przed przełączeniem,  $f_2(x_{k,n} \mid \lambda_2)$  gęstość warunkowa pod warunkiem  $\Lambda_2 = \lambda_2$  w modelu z przełączeniem.
- ▶ Konieczność wyznaczenia warunkowych wartości oczekiwanych dla rozkładów mieszanych.
- ▶ Wyznaczę

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}): \quad = \quad E(\xi_{n+1}\mu_1(\Lambda_1) \mid X_1, \dots, X_n)$$

$$g_2(\underline{\mathbf{X}}): \quad = \quad E(\xi'_{n+1}\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)$$

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- ▶  $f_1(x_{1,k-1})$  gęstość brzegowa rozkładu cechy dla  $k-1$  obserwacji w modelu przed przełączeniem,  $f_2(x_{k,n})$  gęstość brzegowa rozkładu cechy dla obserwacji od  $k$  do  $n$  w modelu z przełączeniem,
- ▶  $f_1(x_{1,k-1} \mid \lambda_1)$  gęstość warunkowa pod warunkiem  $\Lambda_1 = \lambda_1$  w modelu przed przełączeniem,  $f_2(x_{k,n} \mid \lambda_2)$  gęstość warunkowa pod warunkiem  $\Lambda_2 = \lambda_2$  w modelu z przełączeniem.
- ▶ Konieczność wyznaczenia warunkowych wartości oczekiwanych dla rozkładów mieszanych.
- ▶ Wyznaczę

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}): \quad = \quad E(\xi_{n+1}\mu_1(\Lambda_1) \mid X_1, \dots, X_n)$$

$$g_2(\underline{\mathbf{X}}): \quad = \quad E(\xi'_{n+1}\mu_2(\Lambda_2) \mid X_1, \dots, X_n)$$

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

Przy wyznaczaniu warunkowych wartości oczekiwanych dla rozkładów mieszanych korzystam z twierdzenia.

**Swierdzenie** (wersja twierdzenia Bayesa)

Niech  $\underline{\mathbf{X}}$  wektor losowy  $n$ -wymiarowy,  $\underline{\mathbf{Y}}$  wektor losowy  $m$ -wymiarowy spełniającymi warunek

$$P(\underline{\mathbf{X}} \in A \mid \underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{y}}) = \int_A h(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \nu(d\underline{\mathbf{x}})$$

gdzie  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a  $\nu$  jest miarą  $\sigma$ -skończoną oraz  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest funkcją borelowską, taką, że  $E \mid \varphi(\underline{\mathbf{Y}}) \mid < \infty$ . Wówczas

$$E(\varphi(\underline{\mathbf{Y}}) \mid \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{x}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\underline{\mathbf{y}}) \frac{h(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}})}{\int_{-\infty}^{\infty} h(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \mu_Y(d\underline{\mathbf{y}})} \mu_Y(d\underline{\mathbf{y}}).$$

# Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- Gęstość brzegowa  $f_X(x_{1,n})$ , przyjmuje następującą postać

$$f_X(x_{1,n}) = \overline{G}(n)f_1(x_{1,n}) + \sum_{k=1}^n p_k f_1(x_{1,k-1})f_2(x_{k,n})$$



$$\begin{aligned} g_1(\underline{x}): &= E(\xi_{n+1}\mu_1(\Lambda_1) \mid x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{\overline{G}(n+1) \int_0^\infty u_1(\lambda_1)\mu_1(\lambda_1)f_1(x_{1,n} \mid \lambda_1)d\lambda_1}{\overline{G}(n)f_1(x_{1,n}) + \sum_{k=1}^n p_k f_1(x_{1,k-1})f_2(x_{k,n})} \end{aligned}$$

## Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem

- Gęstość brzegowa  $f_X(x_{1,n})$ , przyjmuje następującą postać

$$f_X(x_{1,n}) = \overline{G}(n)f_1(x_{1,n}) + \sum_{k=1}^n p_k f_1(x_{1,k-1})f_2(x_{k,n})$$



$$\begin{aligned} g_1(\underline{x}): &= E(\xi_{n+1}\mu_1(\Lambda_1) \mid x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{\overline{G}(n+1) \int_0^\infty u_1(\lambda_1)\mu_1(\lambda_1)f_1(x_{1,n} \mid \lambda_1)d\lambda_1}{\overline{G}(n)f_1(x_{1,n}) + \sum_{k=1}^n p_k f_1(x_{1,k-1})f_2(x_{k,n})} \end{aligned}$$

# Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem



$$g_1(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{\overline{G}(n+1)\hat{\mu}_1(x_{1,n})}{\overline{G}(n) + \sum_{k=1}^{n+1} p_k \frac{f_1(x_{1,k-1})f_2(x_{k,n})}{f_1(x_{1,n})}}$$

- Wyznaczenie drugiej warunkowej wartości oczekiwanej

$$\begin{aligned} g_2(\underline{\mathbf{X}}): &= \frac{G(n+1) \sum_{k=1}^{n+1} p_k \int_0^\infty u_2(\lambda_2) \mu_2(\lambda_2) f_2(x_{k,n} \lambda_2)}{\overline{G}(n) f_1(x_{1,n}) + \sum_{k=1}^n p_k f_1(x_{1,k-1}) f_2(x_{k,n})} \\ &= \frac{G(n+1) \sum_{k=1}^{n+1} p_k \hat{\mu}_2(x_{k,n}) f_2(x_{k,n})}{\overline{G}(n) f_1(x_{1,n}) + \sum_{k=1}^n p_k f_1(x_{1,k-1}) f_2(x_{k,n})} \end{aligned}$$

# Składka Bayesowska dla modelu z przełączeniem



$$g_1(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{\overline{G}(n+1)\hat{\mu}_1(x_{1,n})}{\overline{G}(n) + \sum_{k=1}^{n+1} p_k \frac{f_1(x_{1,k-1})f_2(x_{k,n})}{f_1(x_{1,n})}}$$

- Wyznaczenie drugiej warunkowej wartości oczekiwanej

$$\begin{aligned} g_2(\underline{\mathbf{X}}): &= \frac{G(n+1) \sum_{k=1}^{n+1} p_k \int_0^\infty u_2(\lambda_2) \mu_2(\lambda_2) f_2(x_{k,n} \lambda_2)}{\overline{G}(n) f_1(x_{1,n}) + \sum_{k=1}^n p_k f_1(x_{1,k-1}) f_2(x_{k,n})} \\ &= \frac{G(n+1) \sum_{k=1}^{n+1} p_k \hat{\mu}_2(x_{k,n}) f_2(x_{k,n})}{\overline{G}(n) f_1(x_{1,n}) + \sum_{k=1}^n p_k f_1(x_{1,k-1}) f_2(x_{k,n})} \end{aligned}$$

# Twierdzenie dla rozkładów z rodziny wykładniczej i rozkładów do nich sprzężonych

## Twierdzenie

Zakładamy, że

- a) jeśli  $k > n$  to zmienne losowe  $X_1, \dots, X_n$  mają gęstość (względem miary Lebesgue'a lub miary bieżącej), postaci:

$$f_{\lambda_1}(x_j) = \exp\left(\frac{x_j \lambda_1 - b_1(\lambda_1)}{\sigma_1^2 / w_j} + c_1(x_j, \frac{\sigma_1^2}{w_j})\right)$$

gdzie funkcja  $b_1()$  jest funkcją rzeczywistą, różniczkowalną zmiennej  $\lambda_1$ , funkcja  $c_1()$  funkcją rzeczywistą, natomiast stałe  $w_j, \sigma_1^2 \in \mathbb{R}$ ,

## Twierdzenie dla rozkładów z rodziny wykładniczej i rozkładów do nich sprzężonych

- b) jeśli  $k \leq n$  to zmienne losowe  $X'_1, \dots, X'_{k-1}$  spełniają założenia punktu a), natomiast zmienne losowe  $X''_k, \dots, X''_n$  mają warunkową gęstość postaci

$$f_{\lambda_2}(x_j) = \exp\left(\frac{x_j \lambda_2 - b_2(\lambda_2)}{\sigma_2^2/w_j} + c_2\left(x_j, \frac{\sigma_2^2}{w_j}\right)\right),$$

gdzie funkcja  $b_2()$  jest funkcją rzeczywistą, różniczkowalną zmiennej  $\lambda_2$ , funkcja  $c_2()$  jest funkcją rzeczywistą, natomiast stałe  $w_j, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}$ ,

- c) zmienna losowa  $\Lambda_i$ , dla  $i = 1, 2$ , ma gęstość względem miary Lebesgue'a, postaci:

$$u(\lambda_i) = \exp\left(\frac{y_i \lambda_i - b_i(\lambda_i)}{\tau_i^2} + d_i(y_i, \tau_i^2)\right)$$

Przyjmując następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 = \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \sigma_1^2/\tau_1^2} \quad \alpha_{2,k} = \frac{w''_{k,\bullet}}{w''_{k,\bullet} + \sigma_2^2/\tau_2^2} \quad P_1^{kol} = EX' \quad P_2^{kol} = EX''$$

$$w_{\bullet} = \sum_{j=1}^n w_j \quad w'_{k,\bullet} = \sum_{j=1}^{k-1} w_j \quad w''_{k,\bullet} = \sum_{j=k}^n w_j$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_{\bullet}} x_j \quad \bar{x}'_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{w'_{k,\bullet}} x_j \quad \bar{x}''_k = \sum_{j=k}^n \frac{w_j}{w''_{k,\bullet}} x_j$$

► Otrzymujemy, że:

Przyjmując następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 = \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \sigma_1^2/\tau_1^2} \quad \alpha_{2,k} = \frac{w''_{k,\bullet}}{w''_{k,\bullet} + \sigma_2^2/\tau_2^2} \quad P_1^{kol} = EX' \quad P_2^{kol} = EX''$$

$$w_{\bullet} = \sum_{j=1}^n w_j \quad w'_{k,\bullet} = \sum_{j=1}^{k-1} w_j \quad w''_{k,\bullet} = \sum_{j=k}^n w_j$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_{\bullet}} x_j \quad \bar{x}'_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{w'_{k,\bullet}} x_j \quad \bar{x}''_k = \sum_{j=k}^n \frac{w_j}{w''_{k,\bullet}} x_j$$

► Otrzymujemy, że:

Przyjmując następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 = \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \sigma_1^2/\tau_1^2} \quad \alpha_{2,k} = \frac{w''_{k,\bullet}}{w''_{k,\bullet} + \sigma_2^2/\tau_2^2} \quad P_1^{kol} = EX' \quad P_2^{kol} = EX''$$

$$w_{\bullet} = \sum_{j=1}^n w_j \quad w'_{k,\bullet} = \sum_{j=1}^{k-1} w_j \quad w''_{k,\bullet} = \sum_{j=k}^n w_j$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_{\bullet}} x_j \quad \bar{x}'_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{w'_{k,\bullet}} x_j \quad \bar{x}''_k = \sum_{j=k}^n \frac{w_j}{w''_{k,\bullet}} x_j$$

▶ Otrzymujemy, że:

Przyjmując następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 = \frac{w_{\bullet}}{w_{\bullet} + \sigma_1^2/\tau_1^2} \quad \alpha_{2,k} = \frac{w''_{k,\bullet}}{w''_{k,\bullet} + \sigma_2^2/\tau_2^2} \quad P_1^{kol} = EX' \quad P_2^{kol} = EX''$$

$$w_{\bullet} = \sum_{j=1}^n w_j \quad w'_{k,\bullet} = \sum_{j=1}^{k-1} w_j \quad w''_{k,\bullet} = \sum_{j=k}^n w_j$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{w_{\bullet}} x_j \quad \bar{x}'_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{w'_{k,\bullet}} x_j \quad \bar{x}''_k = \sum_{j=k}^n \frac{w_j}{w''_{k,\bullet}} x_j$$

► Otrzymujemy, że:

- funkcja  $g_1(\underline{x})$  przyjmuje postać:

$$g_1(\underline{x}) = \frac{L_1}{M}$$



$$L_1 = \frac{\bar{G}(n+1) \exp\left(d_1(y_1, \tau_1^2) + \prod_{j=1}^n c_1(x_j, \frac{\sigma_1^2}{w_j})\right) \left(\alpha_1 \bar{x} + (1 - \alpha_1) P_1^{kol}\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_\bullet\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w_\bullet \bar{x}\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_\bullet\right)\right)\right)},$$



$$\begin{aligned} M &= \frac{\bar{G}(n) \exp\left(\prod_{j=1}^n c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2)\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_\bullet\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w_\bullet \bar{x}\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_\bullet\right)\right)\right)} \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^n p_k \frac{\exp\left(\prod_{j=1}^{k-1} c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2)\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w'_{k,\bullet} \bar{x}'_k\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet}\right)\right)\right)} \right. \\ &\times \left. \frac{\exp\left(\prod_{j=k}^n c_2(x_j) + d_2(y_2, \tau_2^2)\right)}{\exp\left(d_2\left(\left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} y_2 + w''_{k,\bullet} \bar{x}''_k\right), \sigma_2^2 / \left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet}\right)\right)\right)} \right\} \end{aligned}$$

- funkcja  $g_1(\underline{x})$  przyjmuje postać:

$$g_1(\underline{x}) = \frac{L_1}{M}$$



$$L_1 = \frac{\overline{G}(n+1) \exp\left(d_1(y_1, \tau_1^2) + \prod_{j=1}^n c_1(x_j, \frac{\sigma_1^2}{w_j})\right) \left(\alpha_1 \bar{x} + (1 - \alpha_1) P_1^{kol}\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_{\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w_{\bullet} \bar{x}\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_{\bullet}\right)\right)\right)},$$



$$\begin{aligned} M &= \frac{\overline{G}(n) \exp\left(\prod_{j=1}^n c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2)\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_{\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w_{\bullet} \bar{x}\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_{\bullet}\right)\right)\right)} \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^n p_k \frac{\exp\left(\prod_{j=1}^{k-1} c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2)\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w'_{k,\bullet} \bar{x}'_k\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet}\right)\right)\right)} \right. \\ &\times \left. \frac{\exp\left(\prod_{j=k}^n c_2(x_j) + d_2(y_2, \tau_2^2)\right)}{\exp\left(d_2\left(\left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} y_2 + w''_{k,\bullet} \bar{x}''_k\right), \sigma_2^2 / \left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet}\right)\right)\right)} \right\} \end{aligned}$$

- funkcja  $g_1(\underline{x})$  przyjmuje postać:

$$g_1(\underline{x}) = \frac{L_1}{M}$$



$$L_1 = \frac{\overline{G}(n+1) \exp\left(d_1(y_1, \tau_1^2) + \prod_{j=1}^n c_1(x_j, \frac{\sigma_1^2}{w_j})\right) \left(\alpha_1 \bar{x} + (1 - \alpha_1) P_1^{kol}\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_{\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w_{\bullet} \bar{x}\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_{\bullet}\right)\right)\right)},$$



$$\begin{aligned} M = & \frac{\overline{G}(n) \exp\left(\prod_{j=1}^n c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2)\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_{\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w_{\bullet} \bar{x}\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w_{\bullet}\right)\right)\right)} \\ & + \left\{ \sum_{k=1}^n p_k \frac{\exp\left(\prod_{j=1}^{k-1} c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2)\right)}{\exp\left(d_1\left(\left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w'_{k,\bullet} \bar{x}'_k\right), \sigma_1^2 / \left(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet}\right)\right)\right)} \right. \\ & \times \left. \frac{\exp\left(\prod_{j=k}^n c_2(x_j) + d_2(y_2, \tau_2^2)\right)}{\exp\left(d_2\left(\left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet}\right)^{-1} \left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} y_2 + w''_{k,\bullet} \bar{x}''_k\right), \sigma_2^2 / \left(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet}\right)\right)\right)} \right\} \end{aligned}$$

- funkcja  $g_2(\underline{x})$  przyjmuje postać

$$g_2(\underline{x}) = \frac{L_2}{M}$$



$$\begin{aligned}
 L_2 &= \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} p_k (\alpha_{2,k} \bar{x}_k'' + (1 - \alpha_{2,k}) P_2^{kol}) \right. \\
 &\times \frac{\exp(\prod_{j=1}^{k-1} c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2))}{\exp(d_1((\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet})^{-1}(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w'_{k,\bullet} \bar{x}'_k), \sigma_1^2 / (\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet})))} \\
 &\times \left. \frac{\exp(\prod_{j=k}^n c_2(x_j) + d_2(y_2, \tau_2^2))}{\exp(d_2((\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet})^{-1}(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} y_2 + w''_{k,\bullet} \bar{x}''_k), \sigma_2^2 / (\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet})))} \right\} G(n+1)
 \end{aligned}$$

- Mianownik przyjmuje taką samą postać jak dla funkcji  $g_1$

- funkcja  $g_2(\underline{x})$  przyjmuje postać

$$g_2(\underline{x}) = \frac{L_2}{M}$$



$$\begin{aligned}
 L_2 &= \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} p_k(\alpha_{2,k} \bar{x}_k'' + (1 - \alpha_{2,k}) P_2^{kol}) \right. \\
 &\times \frac{\exp(\prod_{j=1}^{k-1} c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2))}{\exp(d_1((\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet})^{-1}(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w'_{k,\bullet} \bar{x}_k'), \sigma_1^2 / (\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet})))} \\
 &\times \left. \frac{\exp(\prod_{j=k}^n c_2(x_j) + d_2(y_2, \tau_2^2))}{\exp(d_2((\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet})^{-1}(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} y_2 + w''_{k,\bullet} \bar{x}_k''), \sigma_2^2 / (\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet})))} \right\} G(n+1)
 \end{aligned}$$

- Mianownik przyjmuje taką samą postać jak dla funkcji  $g_1$

- ▶ funkcja  $g_2(\underline{x})$  przyjmuje postać

$$g_2(\underline{x}) = \frac{L_2}{M}$$



$$\begin{aligned}
 L_2 &= \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} p_k(\alpha_{2,k} \bar{x}_k'' + (1 - \alpha_{2,k}) P_2^{kol}) \right. \\
 &\times \frac{\exp(\prod_{j=1}^{k-1} c_1(x_j) + d_1(y_1, \tau_1^2))}{\exp(d_1((\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet})^{-1}(\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} y_1 + w'_{k,\bullet} \bar{x}'_k), \sigma_1^2 / (\frac{\sigma_1^2}{\tau_1^2} + w'_{k,\bullet})))} \\
 &\times \left. \frac{\exp(\prod_{j=k}^n c_2(x_j) + d_2(y_2, \tau_2^2))}{\exp(d_2((\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet})^{-1}(\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} y_2 + w''_{k,\bullet} \bar{x}_k''), \sigma_2^2 / (\frac{\sigma_2^2}{\tau_2^2} + w''_{k,\bullet})))} \right\} G(n+1)
 \end{aligned}$$

- ▶ Mianownik przyjmuje taką samą postać jak dla funkcji  $g_1$

## Definicja

Składką zaufania  $P_i^{LB}$  dla  $i$ -tego ryzyka (estymatorem zaufania  $\mu(\Theta_i)$ ) wyznaczoną na podstawie obserwacji  $\underline{X}_1 \dots \underline{X}_n$  nazywamy najlepszy możliwy estymator (oznaczamy  $P^{cred}$ ) w klasie estymatorów postaci

- ▶  $L(\underline{X}, 1) = \{\hat{\mu}(\Theta_i) : \hat{\mu}(\Theta_i) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j X_j\}$
- ▶  $P^{cred} = \operatorname{argmin}_{\hat{\mu}(\Theta_i) \in L(\underline{X}, 1)} E\left((\hat{\mu}(\Theta_i) - \mu(\Theta_i))^2\right)$

Przyjmujemy następujące oznaczenia (parametrów strukturalnych):



$$\operatorname{Var}(\mu_1(\Lambda_1)) = \tau_1^2 \quad \operatorname{Var}(\mu_2(\Lambda_2)) = \tau_2^2 \quad E(\sigma_1^2(\Lambda_1)) = \sigma_1^2$$



$$E(\sigma_2^2(\Lambda_2)) = \sigma_2^2 \quad E(\mu_1(\Lambda_1)) = \mu_1 \quad E(\mu_2(\Lambda_2)) = \mu_2$$

## Definicja

Składką zaufania  $P_i^{LB}$  dla  $i$ -tego ryzyka (estymatorem zaufania  $\mu(\Theta_i)$ ) wyznaczoną na podstawie obserwacji  $\underline{X}_1 \dots \underline{X}_n$  nazywamy najlepszy możliwy estymator (oznaczamy  $P^{cred}$ ) w klasie estymatorów postaci

- ▶  $L(\underline{X}, 1) = \{\hat{\mu}(\Theta_i) : \hat{\mu}(\Theta_i) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j X_j\}$
- ▶  $P^{cred} = \operatorname{argmin}_{\hat{\mu}(\Theta_i) \in L(\underline{X}, 1)} E\left((\hat{\mu}(\Theta_i) - \mu(\Theta_i))^2\right)$

Przyjmujemy następujące oznaczenia (parametrów strukturalnych):



$$\operatorname{Var}(\mu_1(\Lambda_1)) = \tau_1^2 \quad \operatorname{Var}(\mu_2(\Lambda_2)) = \tau_2^2 \quad E(\sigma_1^2(\Lambda_1)) = \sigma_1^2$$



$$E(\sigma_2^2(\Lambda_2)) = \sigma_2^2 \quad E(\mu_1(\Lambda_1)) = \mu_1 \quad E(\mu_2(\Lambda_2)) = \mu_2$$

## Definicja

Składką zaufania  $P_i^{LB}$  dla  $i$ -tego ryzyka (estymatorem zaufania  $\mu(\Theta_i)$ ) wyznaczoną na podstawie obserwacji  $\underline{X}_1 \dots \underline{X}_n$  nazywamy najlepszy możliwy estymator (oznaczamy  $P^{cred}$ ) w klasie estymatorów postaci

- ▶  $L(\underline{X}, 1) = \{\hat{\mu}(\Theta_i) : \hat{\mu}(\Theta_i) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j X_j\}$
- ▶  $P^{cred} = \operatorname{argmin}_{\hat{\mu}(\Theta_i) \in L(\underline{X}, 1)} E\left((\hat{\mu}(\Theta_i) - \mu(\Theta_i))^2\right)$

Przyjmujemy następujące oznaczenia (parametrów strukturalnych):



$$\operatorname{Var}(\mu_1(\Lambda_1)) = \tau_1^2 \quad \operatorname{Var}(\mu_2(\Lambda_2)) = \tau_2^2 \quad E(\sigma_1^2(\Lambda_1)) = \sigma_1^2$$



$$E(\sigma_2^2(\Lambda_2)) = \sigma_2^2 \quad E(\mu_1(\Lambda_1)) = \mu_1 \quad E(\mu_2(\Lambda_2)) = \mu_2$$

## Definicja

Składką zaufania  $P_i^{LB}$  dla  $i$ -tego ryzyka (estymatorem zaufania  $\mu(\Theta_i)$ ) wyznaczoną na podstawie obserwacji  $\underline{X}_1 \dots \underline{X}_n$  nazywamy najlepszy możliwy estymator (oznaczamy  $P^{cred}$ ) w klasie estymatorów postaci

- ▶  $L(\underline{X}, 1) = \{\hat{\mu}(\Theta_i) : \hat{\mu}(\Theta_i) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j X_j\}$
- ▶  $P^{cred} = \operatorname{argmin}_{\hat{\mu}(\Theta_i) \in L(\underline{X}, 1)} E\left((\hat{\mu}(\Theta_i) - \mu(\Theta_i))^2\right)$

Przyjmujemy następujące oznaczenia (parametrów strukturalnych):



$$\operatorname{Var}(\mu_1(\Lambda_1)) = \tau_1^2 \quad \operatorname{Var}(\mu_2(\Lambda_2)) = \tau_2^2 \quad E(\sigma_1^2(\Lambda_1)) = \sigma_1^2$$



$$E(\sigma_2^2(\Lambda_2)) = \sigma_2^2 \quad E(\mu_1(\Lambda_1)) = \mu_1 \quad E(\mu_2(\Lambda_2)) = \mu_2$$

## Szkic wyznaczania składki zaufania

Wartości  $c_0, \dots, c_n$ , otrzymujemy z następujących zależności:

- ▶  $E(c_0 + \sum_{j=1}^n c_j X_j - \xi_{n+1} \mu_1(\Lambda_1) - \xi'_{n+1} \mu_2(\Lambda_2)) = 0,$
- ▶  $c_0 = \mu_1 - G(n+1)(\mu_1 - \mu_2) - \sum_{j=1}^n c_j (\bar{G}(j) \mu_1 + G(j) \mu_2),$
- ▶  $\sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\text{cov}(X_j, X_r)}_{K_{j,r}} = \underbrace{\text{cov}(\xi_{n+1} \mu_1(\Lambda_1) + \xi'_{n+1} \mu_2(\Lambda_2), X_r)}_{b_r}$

## Szkic wyznaczania składki zaufania

Wartości  $c_0, \dots, c_n$ , otrzymujemy z następujących zależności:

- ▶  $E(c_0 + \sum_{j=1}^n c_j X_j - \xi_{n+1} \mu_1(\Lambda_1) - \xi'_{n+1} \mu_2(\Lambda_2)) = 0$ ,
- ▶  $c_0 = \mu_1 - G(n+1)(\mu_1 - \mu_2) - \sum_{j=1}^n c_j (\bar{G}(j) \mu_1 + G(j) \mu_2)$ ,
- ▶  $\sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\text{cov}(X_j, X_r)}_{K_{j,r}} = \underbrace{\text{cov}(\xi_{n+1} \mu_1(\lambda_1) + \xi'_{n+1} \mu_2(\Lambda_2), X_r)}_{b_r}$

## Szkic wyznaczania składki zaufania

Wartości  $c_0, \dots, c_n$ , otrzymujemy z następujących zależności:

- ▶  $E(c_0 + \sum_{j=1}^n c_j X_j - \xi_{n+1}\mu_1(\Lambda_1) - \xi'_{n+1}\mu_2(\Lambda_2)) = 0$ ,
- ▶  $c_0 = \mu_1 - G(n+1)(\mu_1 - \mu_2) - \sum_{j=1}^n c_j(\bar{G}(j)\mu_1 + G(j)\mu_2)$ ,
- ▶  $\sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\text{cov}(X_j, X_r)}_{K_{j,r}} = \underbrace{\text{cov}(\xi_{n+1}\mu_1(\Lambda_1) + \xi'_{n+1}\mu_2(\Lambda_2), X_r)}_{b_r}$

# Składka zaufania dla modelu z przełączeniem

## Składka zaufania dla modelu z przełączeniem

gdzie:



$$\begin{aligned} K_{j,r} &= \overline{G}(\max(j, r))(\sigma_1^2 + \tau_1^2 + \mu_1^2) - \mu_1^2 \overline{G}(j) \overline{G}(r) \\ &+ \overline{G}(\min(r, j))(\sigma_2^2 + \tau_2^2 + \mu_2^2) - 2 \overline{G}(\max(j, r)) \overline{G}(\min(j, r)) \mu_1 \mu_2 \end{aligned}$$



$$b_r = \overline{G}(n+1)(\sigma_1^2 + \tau_1^2) + G(r)(\sigma_2^2 + \tau_2^2) + \overline{G}(n+1)G(r)(\mu_1 - \mu_2)^2$$

## Składka zaufania dla modelu z przełączeniem

gdzie:



$$\begin{aligned} K_{j,r} &= \overline{G}(\max(j, r))(\sigma_1^2 + \tau_1^2 + \mu_1^2) - \mu_1^2 \overline{G}(j) \overline{G}(r) \\ &+ \overline{G}(\min(r, j))(\sigma_2^2 + \tau_2^2 + \mu_2^2) - 2G(\max(j, r)) \overline{G}(\min(j, r)) \mu_1 \mu_2 \end{aligned}$$



$$b_r = \overline{G}(n+1)(\sigma_1^2 + \tau_1^2) + G(r)(\sigma_2^2 + \tau_2^2) + \overline{G}(n+1)G(r)(\mu_1 - \mu_2)^2$$

Niech:

- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_1$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_1, b_1)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_2$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_2, b_2)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $N$  ma rozkład dyskretny,
- ▶ zmienne losowe  $X'_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_1)$ ,
- ▶ zmienne losowe  $X''_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_2)$ .
- ▶ Wówczas

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{L_1}{M}$$

Niech:

- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_1$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_1, b_1)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_2$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_2, b_2)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $N$  ma rozkład dyskretny,
- ▶ zmienne losowe  $X'_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_1)$ ,
- ▶ zmienne losowe  $X''_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_2)$ .
- ▶ Wówczas

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{L_1}{M}$$

Niech:

- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_1$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_1, b_1)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_2$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_2, b_2)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $N$  ma rozkład dyskretny,
- ▶ zmienne losowe  $X'_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_1)$ ,
- ▶ zmienne losowe  $X''_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_2)$ .
- ▶ Wówczas

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{L_1}{M}$$

Niech:

- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_1$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_1, b_1)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_2$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_2, b_2)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $N$  ma rozkład dyskretny,
- ▶ zmienne losowe  $X'_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_1)$ ,
- ▶ zmienne losowe  $X''_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_2)$ .
- ▶ Wówczas

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{L_1}{M}$$

Niech:

- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_1$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_1, b_1)$ ,
  - ▶ zmienna losowa  $\Lambda_2$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_2, b_2)$ ,
  - ▶ zmienna losowa  $N$  ma rozkład dyskretny,
  - ▶ zmienne losowe  $X'_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_1)$ ,
  - ▶ zmienne losowe  $X''_j$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_2)$ .
- ▶ Wówczas

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{L_1}{M}$$

Niech:

- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_1$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_1, b_1)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $\Lambda_2$  ma rozkład  $\text{Gamma}(a_2, b_2)$ ,
- ▶ zmienna losowa  $N$  ma rozkład dyskretny,
- ▶ zmienne losowe  $X_j'$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_1)$ ,
- ▶ zmienne losowe  $X_j''$  mają warunkowy rozkład  $\text{Poissona}(\lambda_2)$ .
- ▶ Wówczas

$$g_1(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{L_1}{M}$$

## Przykład składki Bayesowskiej w modelu z przełączeniem

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\bar{G}(n+1)b_1^{a_1}\Gamma(\sum_{j=1}^n x_j + a_1)}{\Gamma(a_1)x_1! \dots x_n!(n+b_1)\sum_{j=1}^n x_j + a_1} \\
 &+ G(n+1) \sum_{k=1}^n \left\{ p_k \frac{b_1^{a_1}\Gamma(\sum_{j=1}^{k-1} x_j + a_1)}{\Gamma(a_1)(k-1+b_1)\sum_{j=1}^{k-1} x_j + a_1 (x_1! \dots x_{k-1}!)} \right. \\
 &\times \left. \frac{b_2^{a_2}\Gamma(\sum_{j=k}^n x_j + a_2)}{\Gamma(a_2)(n-k+1+b_2)\sum_{j=k}^n x_j + a_2 (x_k! \dots x_n!)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$L_1 = \frac{\bar{G}(n+1)b_1^{a_1}\Gamma(\sum_{j=1}^n x_j + a_1)}{\Gamma(a_1)x_1! \dots x_n!(n+b_1)\sum_{j=1}^n x_j + a_1} \frac{\sum_{j=1}^n x_j + a_1}{(n+b_1)}$$

## Przykład składki Bayesowskiej w modelu z przełączeniem

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\bar{G}(n+1)b_1^{a_1}\Gamma(\sum_{j=1}^n x_j + a_1)}{\Gamma(a_1)x_1!\dots x_n!(n+b_1)\sum_{j=1}^n x_j + a_1} \\
 &+ G(n+1)\sum_{k=1}^n \left\{ p_k \frac{b_1^{a_1}\Gamma(\sum_{j=1}^{k-1} x_j + a_1)}{\Gamma(a_1)(k-1+b_1)\sum_{j=1}^{k-1} x_j + a_1 (x_1!\dots x_{k-1}!)} \right. \\
 &\times \left. \frac{b_2^{a_2}\Gamma(\sum_{j=k}^n x_j + a_2)}{\Gamma(a_2)(n-k+1+b_2)\sum_{j=k}^n x_j + a_2 (x_k!\dots x_n!)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$L_1 = \frac{\bar{G}(n+1)b_1^{a_1}\Gamma(\sum_{j=1}^n x_j + a_1)}{\Gamma(a_1)x_1!\dots x_n!(n+b_1)\sum_{j=1}^n x_j + a_1} \frac{\sum_{j=1}^n x_j + a_1}{(n+b_1)}$$

## Przykład składki Bayesowskiej w modelu z przełączeniem



$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{L_2}{M}$$



$$L_2 = G(n+1) \sum_{k=1}^n p_k \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^{k-1} x_j + a_1) b_1^{a_1}}{(n-k+1+b_2) \sum_{j=k}^n x_j + a_2 \Gamma(a_1)} \\ \times \frac{b_2^{a_2} \Gamma(\sum_{j=k}^n x_j + a_2)}{\Gamma(a_2)(k-1+b_1) \sum_{j=1}^{k-1} x_j + a_1 x_1! \dots x_{k-1}! x_k! \dots x_n!} \sum_{j=k}^n \frac{x_j + a_2}{n-k+1+b_2}$$

► Mianownik jak dla  $g_1$

## Przykład składki Bayesowskiej w modelu z przełączeniem



$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{L_2}{M}$$



$$L_2 = G(n+1) \sum_{k=1}^n p_k \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^{k-1} x_j + a_1) b_1^{a_1}}{(n-k+1+b_2) \sum_{j=k}^n x_j^{a_2} \Gamma(a_1)} \\ \times \frac{b_2^{a_2} \Gamma(\sum_{j=k}^n x_j + a_2)}{\Gamma(a_2)(k-1+b_1) \sum_{j=1}^{k-1} x_j^{a_1} x_1! \dots x_{k-1}! x_k! \dots x_n!} \sum_{j=k}^n \frac{x_j + a_2}{n-k+1+b_2}$$

► Mianownik jak dla  $g_1$

## Przykład składki Bayesowskiej w modelu z przełączeniem



$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{L_2}{M}$$



$$L_2 = G(n+1) \sum_{k=1}^n p_k \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^{k-1} x_j + a_1) b_1^{a_1}}{(n-k+1+b_2) \sum_{j=k}^n x_j^{a_2} \Gamma(a_1)} \\ \times \frac{b_2^{a_2} \Gamma(\sum_{j=k}^n x_j + a_2)}{\Gamma(a_2)(k-1+b_1) \sum_{j=1}^{k-1} x_j^{a_1} x_1! \dots x_{k-1}! x_k! \dots x_n!} \sum_{j=k}^n \frac{x_j + a_2}{n-k+1+b_2}$$

- Mianownik jak dla  $g_1$

## Literatura

- a) Bühlmann, H.; Gisler, A. : *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Springer, 2005.
- b) Jakubowski, J.; Sztencel, R.: *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. SCRIPT, Warszawa, 2004.
- c) Purcaru, O.; Denuit, M. : *Dependence in Dynamic Claim Frequency Credibility Models*.
- d) Purcaru, O. ; Guillen, M.; Denuit, M. : *Linear credibility models based on time series for claim counts*.

# Zakończenie

Dziękuję za uwagę!