Zadanie 2

a) Funkcja jednostkowego kosztu:

$$wR + rK = 1$$

b) Izokwanty jednostkowej wartości:

$$P_i * Q_i = P_i * K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} = 1$$

$$K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} = 1/P_i$$

$$K_i^{\alpha_i} = (1/P_i) L_i^{\alpha_i - 1}$$

$$K_i^i = (1/P_i)^{\frac{1}{\alpha_i}} L_i^{\frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i}}$$

c) Optymalna relacja kapitału do pracy:
Funkcje produkcji:

$$Q_i = K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}$$

Minimalizacja kosztów:

$$\mathcal{L} = wL_i + rK_i - \lambda(K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} - Q)$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_i} = w - (1-\alpha_i)\lambda K_i^{\alpha_i} L_i^{-\alpha_i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_i} = r - \alpha_i \lambda K_i^{\alpha_i - 1} L_i^{1-\alpha_i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Q_i - K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} = 0$$

Porządkujemy:

$$(1-\alpha_i)\lambda K_i^{\alpha_i} L_i^{-\alpha_i} = w \qquad (1)$$

$$\alpha_i \lambda K_i^{\alpha_i - 1} L_i^{1-\alpha_i} = r \qquad (2)$$

$$Q_i = K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i} \qquad (3)$$

Dzielimy 1 przez 2 (to się przyda do zadania 3):

$$\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \frac{K_i}{L_i} = \frac{w}{r}$$

albo:

$$\frac{K_i}{L_i} = \frac{w}{r} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$$

Jeżeli $\alpha_M > \alpha_C$, to:

$$\frac{K_M}{L_M} > \frac{K_C}{L_C}$$

przy danych cenach czynników.

Zadanie 3

Optymalne K/L dla obu sektorów:

$$K_1/L_1 = 2\frac{w}{r}$$

$$K_2/L_2 = \frac{w}{2r}$$

Krzywa kontraktowa:

$$\frac{K_1}{2L_1} = \frac{2K_2}{L_2}$$

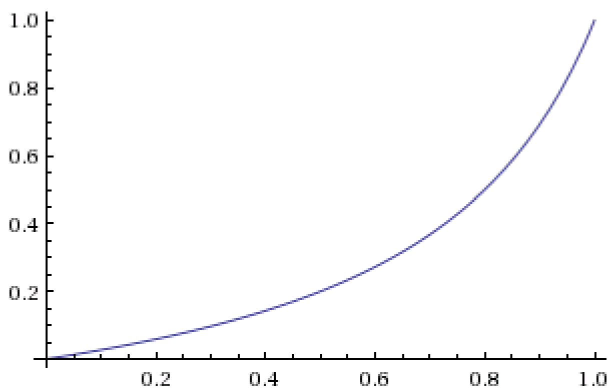
$$\frac{K_1}{4L_1} = \frac{K - K_1}{L - L_1}$$

$$K_1(L - L_1) = 4L_1(K - K_1)$$

$$K_1 L = 4L_1(K - K_1) + L_1 K_1$$

$$K_1 L = L_1(4K - 3K_1)$$

$$\frac{K_1 L}{4K - 3K_1} = L_1$$



Funkcja użyteczności:

$$U(c_1, c_2) = \beta \ln c_1 + (1-\beta) \ln c_2$$

Funkcja produkcji:

$$Q_i = K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}$$

Ograniczenia zasobów:

$$L_1 + L_2 = L \ \rightarrow L_2 = L - L_1$$

$$K_1 + K_2 = K \ \rightarrow K_2 = K - K_1$$

Podstawiamy:

$$C_1 = K_1^{\alpha_1} L_1^{1-\alpha_1} = K_1^{2/3} L_1^{1/3}$$

$$C_2 = K_2^{\alpha_2} L_1^{1-\alpha_2} = K_2^{1/3} L_2^{2/3} = (K - K_1)^{1/3} (L - L_1)^{2/3}$$

I do funkcji użyteczności:

$$U(c_1, c_2) = \frac{5}{7} \ln(K_1^{2/3} L_1^{1/3}) + \frac{2}{7} \ln((K - K_1)^{1/3} (L - L_1)^{2/3})$$

Maksymalizacja U, warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial U}{\partial K_1} = \frac{5}{7}\frac{2}{3}\frac{K_1^{-1/3} L_1^{1/3}}{K_1^{2/3} L_1^{1/3}} - \frac{2}{7}\frac{1}{3}\frac{(K - K_1)^{-2/3}(L - L_1)^{2/3}}{(K - K_1)^{1/3}(L - L_1)^{2/3}} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial L_1} = \frac{5}{7}\frac{1}{3}\frac{K_1^{2/3} L_1^{-2/3}}{K_1^{2/3} L_1^{1/3}} - \frac{2}{7}\frac{2}{3}\frac{(K - K_1)^{1/3}(L - L_1)^{-1/3}}{(K - K_1)^{1/3}(L - L_1)^{2/3}} = 0$$

$$5K_1^{-1} = (K - K_1)^{-1}$$

$$5L_1^{-1} = 4(L - L_1)^{-1}$$

Czyli:

$$K_1 = 5(K - K_1)$$

$$4L_1 = 5(L - L_1)$$

A zatem:

$$K_1 = \frac{5}{6} K$$

$$L_1 = \frac{5}{9} L$$

Stąd można też jednoznacznie wyznaczyć produkcję (ale nie potrzeba).
Ceny czynników (minimalizacja kosztów):

$$\frac{MPK_1}{MPL_1} = \frac{r}{w}$$

$$\frac{4}{3}\frac{L}{K} = 2\frac{L_1}{K_1} = \frac{r}{w}$$

Ceny dóbr:

$$p_1 MPL_1 = p_2 MPL_2$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{MPL_2}{MPL_1} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{K_2}{L_2})^{1/3}}{\frac{2}{3}(\frac{K_1}{L_1})^{2/3}} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\frac{w}{r})^{1/3}}{\frac{2}{3}(2\frac{w}{r})^{2/3}} = (\frac{r}{w})^{1/3} = (\frac{4}{3}\frac{L}{K})^{1/3}$$