Model Solow-Swan

W modelu klasycznym mieliśmy do czynienia ze stałą wielkością czynników produkcji, a zatem był to model statyczny, który nie pokazywał nam dlaczego dany kraj rozwija się szybciej niż inny. Model Solowa pokazuje jak oszczędności, przyrost naturalny populacji oraz postęp technologiczny wpływają na stopę wzrostu gospodarczego. Podobnie jak w modelu klasycznym mamy 2 czynniki produkcji (K i L), które wchodzą w skład funkcji produkcji opisującej całość produkcji wytworzonej w gospodarce (stąd nazwa – model neoklasyczny).

$Y = f(K, L)$

Funkcja produkcji może zakładać stałe przychody skali, a więc:

$zY = f(zK, zL)$ dla $z > 0$

Ponieważ jednak miarą dobrobytu danego kraju jest dochód *per capita* to przyjmując, że $z=1/L$ otrzymujemy wielkość produkcji na 1 osobę:

$Y/L = f(K/L,1)$

Aby wyrazić wielkości *per capita* przyjmujemy:

$y = Y/L$ oraz $k = K/L$

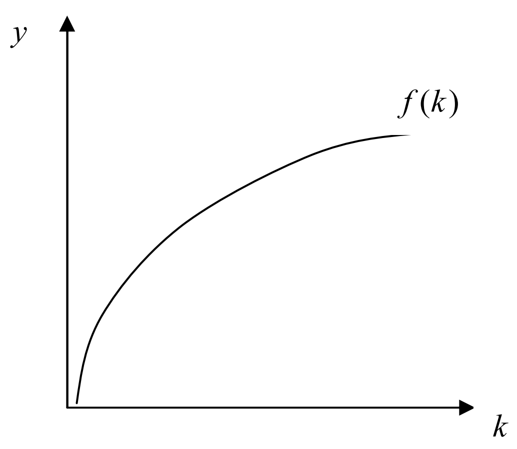
Wtedy możemy zapisać:

$y = f(k)$ gdzie $f(k) = f(k,1)$

W przypadku funkcji Cobba-Douglasa mamy: $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$

Dzieląc obie strony przez L otrzymujemy: $Y / L = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} / L \Rightarrow y = AK^{\alpha} / L^{\alpha} = Ak^{\alpha}$

Funkcja produkcji pokazuje nam, że ilość kapitału w gospodarce determinuje nam wielkość produkcji na 1 zatrudnionego. Nachylenie funkcji produkcji jest równe krańcowej produktywności kapitału. Widać wyraźnie, że krańcowy produkt kapitału jest malejący – im więcej k tym mniejszy jest przyrost produkcji na jego jednostkę.



Możemy to wyrazić matematycznie jako:

$MPK = f(k + 1) – f(k)$

Model Solowa w najprostszej postaci zakłada brak rządu w gospodarce, dlatego:

$G = T = 0$

Czyli dochód *per capita* jest dzielony pomiędzy konsumpcję i inwestycje co zapisujemy jako:

$y = c + i$ (wszystkie wielkości wyrażone na 1 pracującego)

Zgodnie z modelem funkcja konsumpcji przyjmuje postać:

$c = (1 - s)y$ gdzie s oznacza stopę oszczędności

A zatem konsumpcja jest proporcjonalna do dochodu i nie ma konsumpcji autonomicznej.

Podstawiając powyższe do funkcji produkcji otrzymujemy:

$y = (1 - s)y + i \quad \Rightarrow \quad sy = i = sf(k)$

Oznacza to, że inwestycje tak jak konsumpcja są proporcjonalne do dochodu. Jednocześnie wielkość inwestycji zależy także od stopy oszczędności.

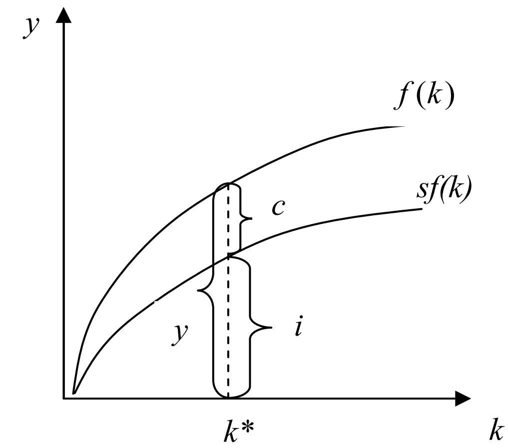
Ponieważ w modelu Solowa funkcja produkcji jest funkcją zależną od wielkości kapitału, to siłą rzeczy wzrost gospodarczy jest pochodną zwiększania ilości kapitału. Tymczasem zmiany ilości kapitału mogą mieć miejsce w dwóch przypadkach:

- kapitał może rosnąć dzięki inwestycjom
- kapitał może maleć na skutek deprecjacji (zużycia)

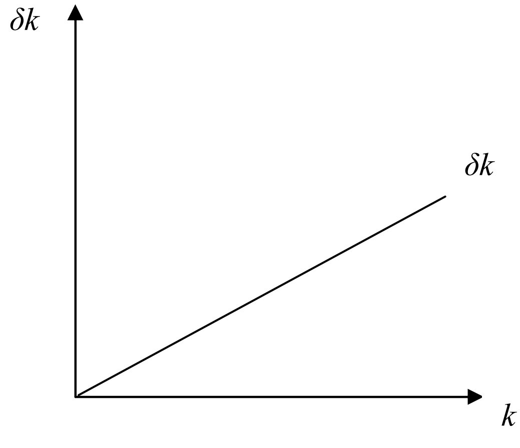
Ponieważ mieliśmy już wcześniej że:

$i = sf(k)$ oraz $y = c + i$

Z powyższego równania wynika jednoznacznie, iż im większa jest ilość kapitału, tym większe są inwestycje. Zarazem poziom stopy oszczędności determinuje podział dochodu pomiędzy konsumpcję i inwestycje.



W przypadku deprecjacji zakładamy, że jakaś stała część kapitału ulega zużyciu każdego roku. Np. zakładając, że przeciętna długość życia samochodu wynosi 10 lat, należy przyjąć że jego wartość deprecjonuje się o 10% rocznie. Dlatego relacja pomiędzy ilością kapitału a wielkością deprecjacji jest liniowa.



Przyrost kapitału w modelu Solowa

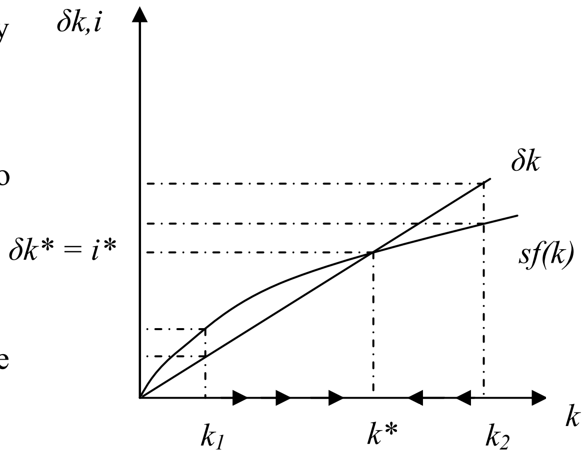
$\dot{K} = I - \delta K$ //L gdzie $\Delta K = dK/dt = \dot{K}$ (oba zapisy są równorzędne)
$\dot{K}/L = i - \delta k$
$\dot{k} = d(K/L)/dt = (\dot{K} * L - \dot{L} * K)/L^2 = \dot{K}/L - \dot{L}/L * K/L = \dot{K}/L - nk$
$\dot{k} = i - \delta k - nk = i - (\delta + n)k$

Zakładając, że liczba ludności jest stała (n = 0) to zmianę ilości kapitału pomiędzy jednym rokiem a drugim można wyrazić jako:

$\dot{k} = i - \delta k = sf(k) - \delta k$

Osiąganie *steady-state*

Rysunek obok przedstawia zależność pomiędzy ilością kapitału, inwestycjami i deprecjacją. Widać, że im więcej kapitału tym większa jest produkcja i inwestycje ale też i deprecjacja. Istnieje tylko jeden poziom kapitału dla którego inwestycje są równe deprecjacji. Jeśli gospodarka osiągnie ten poziom to wielkość kapitału nie będzie się zmieniać w miarę upływu czasu – *steady-state level*. Jeżeli k jest poniżej tego poziomu to inwestycje przewyższają deprecjację, a więc *capital stock* będzie rósł. Jeśli *k* jest powyżej poziomu ustalonego to deprecjacja przewyższa inwestycje – poziom kapitału musi zmaleć.



Steady-state reprezentuje długookresową równowagę w gospodarce. Zatem zgodnie z modelem, niezależnie od tego na jakim poziomie jest kapitał na samym początku i tak w końcu musi się znaleźć na poziomie wyznaczonym przez *steady-state*. Jeżeli kapitał jest początkowo na poziomie niższym od stanu ustalonego to będzie rósł do chwili gdy go nie osiągnie. Analogicznie będzie również rosła produkcja.

Zadanie:

Funkcja produkcji ma postać $Y = K^{1/2}L^{1/2}$, stopa oszczędności wynosi s = 0,3, zaś stopa deprecjacji δ = 0,1. Jaka będzie wielkość kapitału w *steady-state* w tej gospodarce?

Odp.

$y = \sqrt{k}$ oraz $\Delta k = i - \delta k = sf(k) - \delta k$

Ponieważ w *steady-state* $\Delta k = 0$ to mamy $s/\delta = k/\sqrt{k}$

Dlatego k* = 9

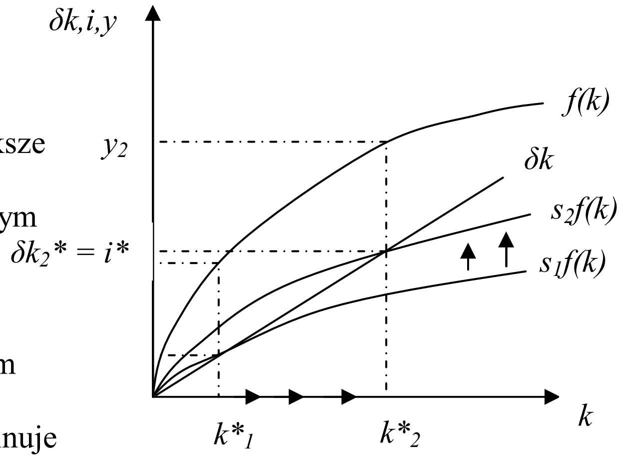
Implikacje stanu ustalonego

W stanie ustalonym mamy:

$sf(k^*) = \delta k^* \qquad \Rightarrow \qquad k^*/f(k^*) = s/\delta$

Stosunek kapitału do wytworzonego produktu jest miarą kapitałochłonności gospodarki, który w stanie ustalonym jest stały i równy stosunkowi stopy oszczędności do deprecjacji. Jeżeli gospodarka nie znajduje się w stanie ustalonym to współczynnik kapitałochłonności będzie się zmieniał, aż do chwili osiągnięcia *steady-state*.

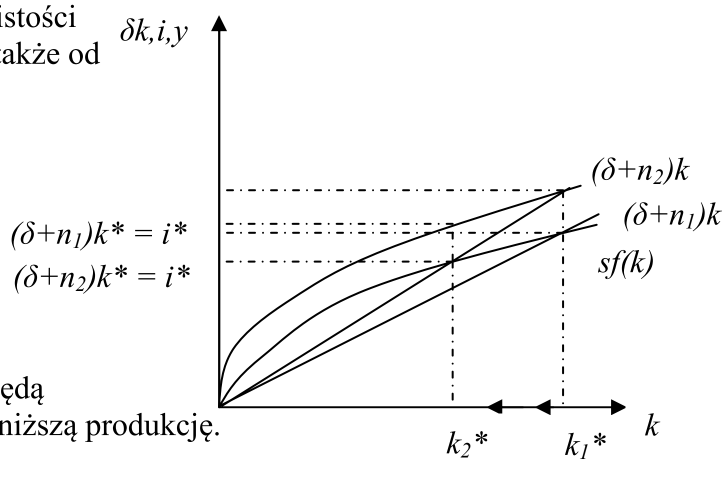
Zmiana stopy oszczędności



Wzrost stopy oszczędności powoduje przesunięcie funkcji oszczędności w górę. Oznacza to, iż nakłady inwestycyjne są większe dla każdego poziomu kapitału. Ponieważ przy poziomie kapitału określającym stan ustalony (k^*_1) inwestycje są większe niż deprecjacja to zasób kapitału będzie rósł, aż do chwili osiągnięcia nowego stanu ustalonego (k^*_2). W nowym stanie ustalonym zarówno kapitał jak i produkcja są większe. Widać zatem, że stopa oszczędności determinuje poziom kapitału i produkcji. Kraje o niskiej stopie oszczędności będą miały niski poziom kapitału i niski poziom produkcji, odwrotnie w krajach o wysokiej stopie oszczędności.

Ale w rzeczywistości okazuje się, że często kraje o niższym poziomie oszczędności charakteryzują się wyższym poziomem dochodu. Wynika to z tego, iż każdy z nich posiada inny stan ustalony.

Zmiana stopy wzrostu populacji



Jak pokazaliśmy już wcześniej w rzeczywistości zmiana zasobu kapitału *per capita* zależy także od stopy wzrostu populacji. A zatem mamy:

$\dot{k} = i - \delta k - nk = i - (\delta + n)k$

Wyższa stopa wzrostu populacji sprawia, że krzywa deprecjacji przesuwa się w górę. W efekcie spada zasób kapitału i poziom produkcji. Zgodnie z modelem kraje o wyższej stopie wzrostu populacji będą miały niższy poziom kapitału *per capita* i niższą produkcję.

Zadanie

Nie mając żadnego ciekawego pomysłu na zadanie dla swoich studentów el Maestro Rokitek postanowił sprawdzić, czy uważali oni na ostatnich zajęciach. Dlatego też kolejne pytanie stawiane biednym, znudzonym studentom brzmi: Jaki jest poziom kapitału w stanie ustalonym dla funkcji Cobba-Douglasa w postaci $y = Ak^{\alpha}$?

Złota reguła akumulacji kapitału

Jak pokazaliśmy już wcześniej zwiększanie stopy oszczędności w modelu Solowa prowadzi do wzrostu produkcji i zasobów kapitału. Jednocześnie jednak dla danej krzywej deprecjacji istnieje tylko jeden optymalny poziom kapitału, przy którym konsumpcja przyjmuje maksymalną wartość. Ponieważ dobrobyt danego społeczeństwa zależy od poziomu konsumpcji to każdy naród powinien wybrać taką stopę oszczędności, która będzie maksymalizować konsumpcję.

Pamiętając o tym, że oszczędności to różnica pomiędzy dochodem i konsumpcją możemy zapisać:

$\dot{k} = f(k) - c - (\delta+n)k$ ale w *steady-state* mamy $\dot{k} = 0$

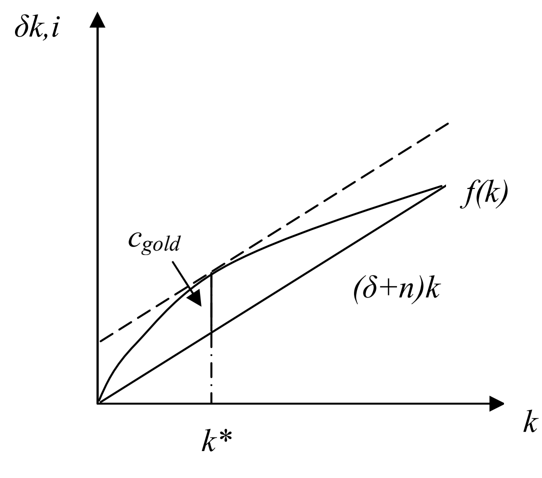
dlatego $0 = f(k^*) - c^* - (\delta+n)k^* \quad \Rightarrow \quad c^* = f(k^*) - (\delta+n)k^*$

Aby otrzymać formułę złotej reguły wystarczy zmaksymalizować konsumpcję w stanie ustalonym wobec kapitału:

$dc^*/dk^* = f'(k^*) - (\delta+n) = 0 \Rightarrow \quad f'(k^*) = (\delta+n) = MPK$

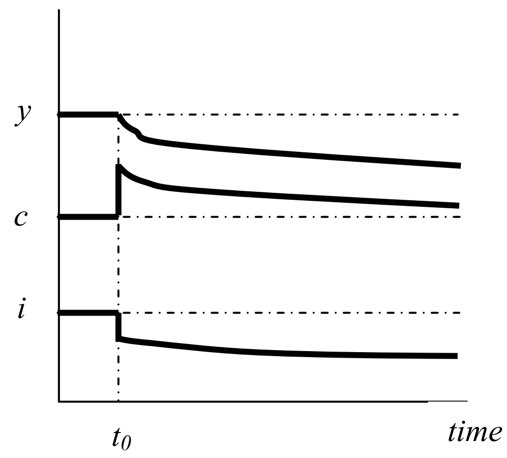
W interpretacji graficznej powyższy wynik oznacza, że konsumpcja jest maksymalna wtedy gdy nachylenie funkcji produkcji jest równe $(\delta+n)$ (odległość między funkcją produkcji i krzywą deprecjacji jest tutaj maksymalna).

Na wykresie obok pokazane jest, że dla poziomu kapitału przy którym nachylenie funkcji produkcji jest równe $(\delta+n)$ konsumpcja przyjmuje maksymalną wartość.
Warto pamiętać o tym, że w zależności od tego jaka jest stopa oszczędności, gospodarka może lub nie osiągnąć punkt k*.
Jeżeli gospodarka znajduje się na prawo od punktu k* to oznacza, że jest ona nieefektywna gdyż nie maksymalizuje konsumpcji.



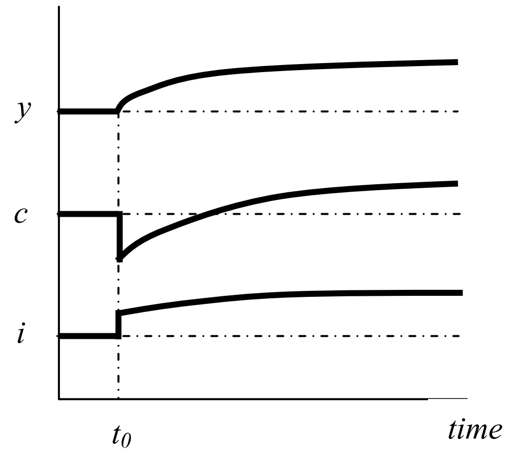
Osiąganie poziomu kapitału dla właściwego dla c_{gold} gdy jest go za dużo

Jeżeli w danym momencie w gospodarce jest więcej kapitału niż wynikałoby to ze złotej reguły, to jedyną możliwością jego zmniejszenia jest spadek stopy oszczędności.
Spadek stopy oszczędności powoduje natychmiastowy spadek inwestycji i wzrost konsumpcji.
Następnie jednak gdy gospodarka zaczyna zmierzać w stronę stanu ustalonego spada poziom produkcji, dalej ograniczane są inwestycje oraz spada poziom konsumpcji (w efekcie zmniejszenia produkcji).
Niezależnie od spadku konsumpcji w okresie osiągania stanu ustalonego i tak jest ona większa niż wcześniej.



Osiąganie poziomu kapitału dla właściwego dla c_{gold} gdy jest go za mało

W przypadku gdy zasób kapitału jest mniejszy niż wynika to ze złotej reguły to racjonalne jest podwyższenie stopy oszczędności.
W efekcie nastąpi natychmiastowy wzrost inwestycji i spadek konsumpcji.
Następnie jednak wzrost inwestycji spowoduje wzrost produkcji, co z kolei wpłynie na zwiększenie konsumpcji i dalszy wzrost inwestycji.
W tym przypadku konsumpcja w pierwszym etapie jest niższa, jednak jej poziom stopniowo się zwiększa i po osiągnięciu stanu ustalonego jest wyższy niż na początku.



Stopa wzrostu w modelu Solowa

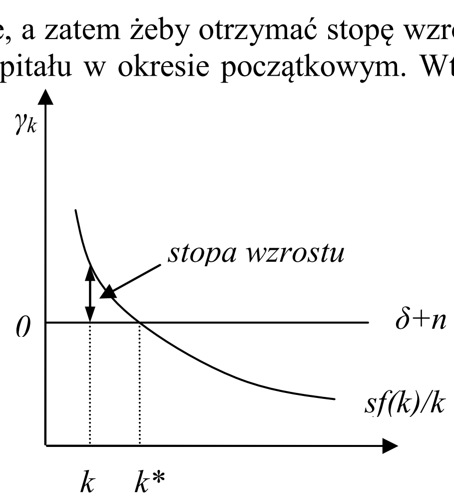
Jak pokazywaliśmy już wcześniej produkcja w modelu Solowa jest rosnącą funkcją kapitału. Oznacza to w praktyce, że stopa wzrostu PKB *per capita* musi być proporcjonalna do stopy wzrostu kapitału *per capita*. Ponieważ w funkcji Cobba-Douglasa udział dochodu z kapitału w całym dochodzie jest równy α to możemy zapisać stopę wzrostu jako:

$$\gamma_y = \dot{y} / y = \alpha \dot{k} / k = \alpha \gamma_k$$ dla stałego poziomu technologii

Wiemy już czemu równa jest zmiana kapitału w czasie, a zatem żeby otrzymać stopę wzrostu kapitału wystarczy podzielić zmianę przez poziom kapitału w okresie początkowym. Wtedy otrzymujemy:

$$\gamma_k = \dot{k} / k = i / k - (\delta + n) = \frac{sf(A,k)}{k} - (\delta + n)$$

Dlatego im większa jest stopa oszczędności tym większa jest też stopa wzrostu gospodarczego.



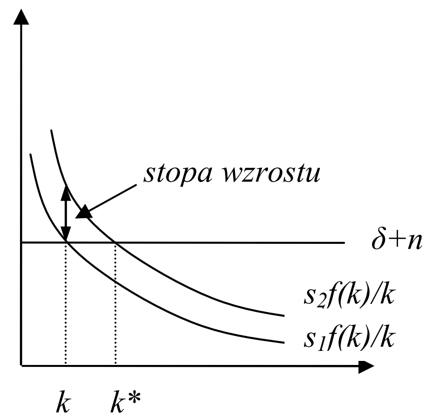
Zadanie. Pokaż właściwości funkcji *sf(k,A)/k* i jej wykres, gdzie *f(k,A)* ma postać funkcji Cobba-Douglasa.

Im wyższy jest poziom technologiczny tym większa jest ilość produkcji i inwestycji, a więc tym wyższa również stopa wzrostu. Im wyższa stopa deprecjacji tym mniejszy wzrost. Jak widać na wykresie im więcej jest kapitału tym mniejszy jest stosunek *sf(k)/k.* Dlatego też im więcej kapitału w gospodarce tym mniejsza jest stopa wzrostu.

Najważniejszym wnioskiem jaki można wyciągnąć z powyższego wykresu jest taki, że w długim okresie gospodarka powinna dążyć do osiągnięcia stanu ustalonego. A zatem z czasem stopa wzrostu powinna być coraz mniejsza! Tymczasem w rzeczywistości okazuje się, że jest możliwy wzrost gospodarczy w długim okresie, a zatem model neoklasyczny w podstawowej wersji nie tłumaczy przyczyn jego występowania.

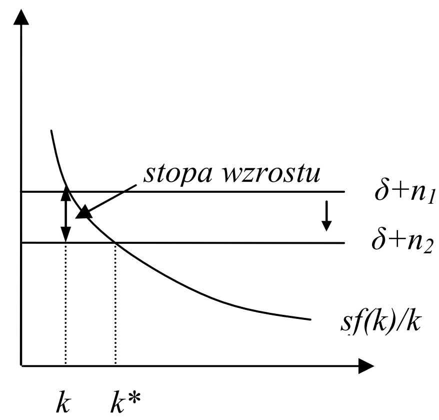
Czy możliwe jest zwiększenie stopy wzrostu poprzez podwyższenie stopy oszczędności?

Podwyższenie stopy oszczędności prowadzi do wyższej stopy wzrostu w krótkim okresie. W długim okresie okazuje się jednak, że gospodarka ponownie dąży do stanu ustalonego, w którym stopa wzrostu jest równa zero.
Co więcej jak pokazywaliśmy już wcześniej, taka polityka może być niewłaściwa w sytuacji gdy Poziom kapitału w gospodarce jest większy niż wynikałoby to ze złotej reguły. Dalsze podwyższanie stopy oszczędności prowadzi w tym przypadku do powiększania się nieefektywności gospodarki.



Czy możliwe jest zwiększenie stopy wzrostu poprzez obniżenie stopy wzrostu populacji?

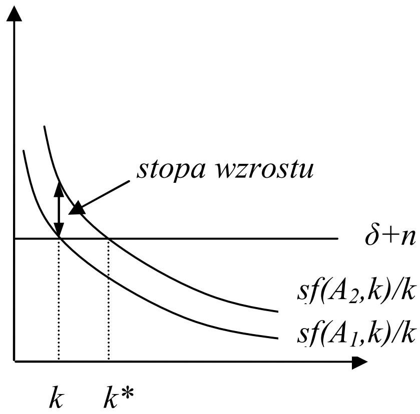
Działania prowadzące do obniżenia stopy wzrostu populacji powodują spadek krzywej deprecjacji oraz podwyższenie stopy wzrostu.
Okazuje się jednak, że stopa wzrostu rośnie jedynie w krótkim okresie, natomiast w długim ponownie będzie dążyła do zera.
Pokazuje to wyraźnie, że taka polityka jest nieskuteczna, co więcej może być również niekorzystna dla gospodarki w długim okresie (efekt starzenia się społeczeństwa).



Jak można zatem wyjaśnić na bazie modelu neoklasycznego istnienie długookresowego wzrostu gospodarczego? Odpowiedź na to pytanie leży w przemianach technologicznych. Do tej pory zakładaliśmy, że technologia jest stała. Należy jednak pamiętać, iż nasza funkcja produkcji ma postać:

$y = f(A, k)$ lub w przypadku funkcji Cobba-Douglasa $y = Ak^{\alpha}$

Zatem im większe jest A tym wyższy poziom produkcji. Na wykresie obok widać wyraźnie, że postęp technologiczny przesuwa krzywą oszczędności w prawo. Jednak w odróżnieniu od podwyższania Stopy oszczędności, postęp technologiczny jest nieograniczony i może powodować ciągłe przesuwanie się krzywej oszczędności w prawo.



A zatem długookresowy wzrost gospodarczy w modelu Solowa może być wytłumaczony jako pochodna stałego postępu technologicznego.
Jeżeli poziom technologii zwiększa się w stałym tempie x to poziom kapitału typowy dla stanu ustalonego też zwiększa się w tym samym tempie x.
Oznacza to, że stopa wzrostu *per capita* w stanie ustalonym jest dodatnia i równa stopie postępu technologicznego x, która jest jednak egzogeniczna (a zatem model nie pokazuje nam co jest przyczyną postępu technologicznego).

Możemy również powyższe udowodnić algebraicznie, korzystając z własności logarytmów. I tak jeśli:

$y = Ak^{\alpha}$ to $logy = logA + \alpha logk$ oraz wiemy że $d \log y / dt = \dot{y} / y$ (stopa wzrostu)

to wtedy mamy $\gamma_y = \dot{y} / y = \dot{A} / A + \alpha \dot{k} / k$

Analogicznie dla Y(PKB):

$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$ to wtedy $\gamma_Y = \dot{Y} / Y = \dot{A} / A + \alpha \dot{K} / K + (1-\alpha) \dot{L} / L$ gdzie $\dot{L} / L = n$

Endogeniczne modele wzrostu – model AK

Jak pokazaliśmy już wcześniej, założenia modelu Solowa powodują, że model ten nie tłumaczy występowania długookresowego wzrostu gospodarczego (nie wiadomo kto miałby finansować postęp technologiczny, który jest konieczny dla zapewnienia wzrostu w długim okresie). Dlatego też część ekonomistów zaczęła szukać takich rozwiązań, które pozwoliłyby wyeliminować tą ułomność. W ten sposób powstały endogeniczne modele wzrostu, których najprostszą wersją jest model AK. Utrzymuje on podstawowe założenia modelu Solowa, jednak zgodnie z jego założeniami funkcja produkcji przyjmuje postać:

Y = AK gdzie kapitał zawiera w sobie również czynnik ludzki (kapitał ludzki)

W postaci *per capita* otrzymujemy zatem:

y = Ak

Podobnie jak w modelu Solowa przyrost kapitału jest równy:

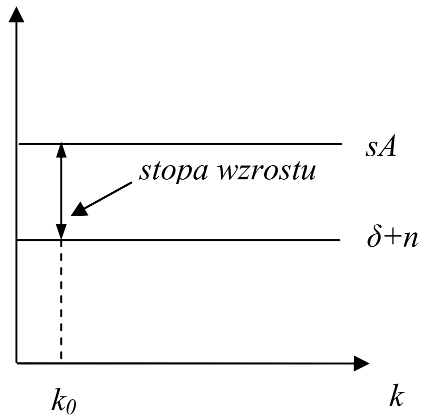
$\dot{k} = i - \delta k - nk = sf(k) - (\delta + n)k$

A zatem stopa wzrostu produkcji jest proporcjonalna do stopy wzrostu kapitału i analogicznie do modelu Solowa wyraża się wzorem:

$\gamma_k = \dot{k}/k = i/k - (\delta+n) = sf(k,A)/k - (\delta+n)$

Jeżeli jednak do powyższego wzoru podstawimy funkcję produkcji AK to okazuje się, że model ten przewiduje nieograniczony, dodatni wzrost gospodarczy zawsze gdy $sA>(\delta+n)$:

$\gamma_k = \dot{k}/k = sAk/k - (\delta+n) = sA - (\delta+n)$



Możemy to przedstawić graficznie, podobnie jak dla modelu Solowa. Widać wyraźnie, że dla $sA>(\delta+n)$ będziemy mieć zawsze dodatnią stopę wzrostu, niezależnie od ilości kapitału w gospodarce. Co więcej, utrzymanie dodatniej stopy wzrostu jest możliwe nawet jeżeli A nie ulega zmianom. Model ten pokazuje również, że gospodarki z wyższą stopą oszczędności i poziomem technologicznym zawsze będą miały wyższą stopę wzrostu. A zatem brak jest tutaj możliwości dla wystąpienia procesu konwergencji.

Postęp technologiczny – rozszerzenie modelu neoklasycznego

Aby do modelu Solowa włączyć postęp technologiczny musimy wrócić do funkcji produkcji i założyć, że zależy ona nie tylko od ilości kapitału i pracy ale także od wydajności pracy. Mamy zatem:

$Y = f(K, L^*A)$ gdzie A oznacza wydajność pracy,

zaś $\hat{L} \equiv LA$ jest jednostką wydajności pracy

W tym przypadku nakłady siły roboczej mierzone są w jednostkach wydajności, zaś wielkość produkcji zależy od ilości kapitału oraz od ilości jednostek wydajności.
Przyjmijmy, że wydajność pracy rośnie w stałym tempie równym x, podczas gdy populacja zwiększa się w tempie n. Widać zatem, że liczba jednostek wydajności rośnie w tempie n + x (patrz własności logarytmów pokazane powyżej).
W efekcie zmiana zasobu kapitału w gospodarce będzie równa (przy czym kapitał jest definiowany jako kapitał na jednostkę wydajności):

$\partial\hat{k}/\partial t = i - \delta\hat{k} - (n+x)\hat{k} = sf(\hat{k}) - (\delta + n + x)\hat{k}$ gdzie $\hat{k} = \dfrac{K}{\hat{L}} = \dfrac{k}{A}$

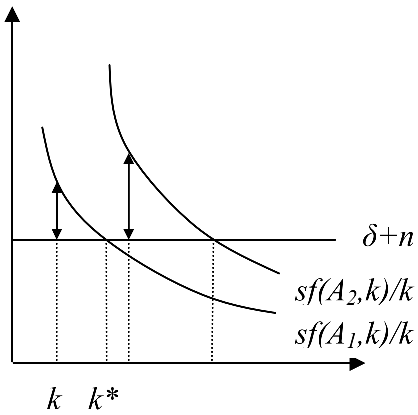
A zatem zwiększenie x (przy innych zmiennych *costant*) prowadzi do spadku $\hat{k}$ ale jednocześnie powoduje wzrost k oraz y, które w stanie ustalonym rosną w tempie x[1].
Problemem z jakim mamy do czynienia w modelu neoklasycznym jest założenie o tym, że cały dochód wytwarzany w gospodarce jest dzielony pomiędzy właścicieli czynnika kapitału i pracy. Oznacza to, że nie ma już środków, które mogłyby być przeznaczone na finansowanie postępu technologicznego. Dlatego też musi on pozostać egzogeniczny co z intelektualnego punktu widzenia jest mało atrakcyjne.

Zadanie. W ramach pracy domowej Maestro Rokitek jako prezent gwiazdkowy postanowił dać bardzo łatwe ;-) zadanie, które polega na tym, że należy wyprowadzić poniższy wzór:

$$d\hat{k}/dt = i - \delta\hat{k} - (n+x)\hat{k} = sf(\hat{k}) - (\delta+n+x)\hat{k}$$

Konwergencja

Pojęcie to opisuje zależność pomiędzy początkowym poziomem dochodu (kapitału w gospodarce) a wysokością stopy wzrostu. Jak pokazywaliśmy już wcześniej model neoklasyczny przewiduje, że im więcej jest kapitału w gospodarce tym niższa jest stopa wzrostu.
A zatem w przypadku gdy mamy do czynienia z dwoma gospodarkami, które różnią się jedynie początkowym zasobem kapitału, to ta która jest biedniejsza powinna rozwijać się szybciej niż ta bogatsza. Mielibyśmy wtedy do czynienia z konwergencją absolutną. W praktyce jednak kraje mogą się różnić zarówno stopą oszczędności, technologią, stopą wzrostu populacji czy stopą deprecjacji. Powoduje to, iż model neoklasyczny nie przewiduje zawsze szybszego wzrostu w biedniejszych krajach. Możliwe jest jednak wtedy wystąpienie konwergencji warunkowej, która oznacza że każdy kraj dąży do swojego stanu ustalonego.



Zadanie. Chcąc pomóc swoim wspaniałym studentom w przygotowaniu się na kartkówkę, Maestro Rokitek wymyślił następujące zadanie: zakładając, że poziom kapitału *per capita* jest niższy niż byłby w warunkach długookresowej równowagi proszę wyjaśnić:

- Proces dochodzenia do długookresowej równowagi – czy w okresie dochodzenia do równowagi tempo wzrostu będzie się zmieniało? Jakie jest podstawowe założenie modelu, które warunkuje taką dynamikę?
- Czy kraje uboższe mają szansę dogonić kraje bogate pod względem PKB *per capita*? Jakie warunki muszą być spełnione?
- Jakie skutki dla odpowiedzi w poprzednim punkcie będzie miało przyjęcie funkcji produkcji $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ gdzie $\alpha + \beta > 1$

[1] Skoro $\hat{k} = \frac{k}{A}$ to $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{k}}{k} - \frac{\dot{A}}{A}$. A zatem w stanie ustalonym $\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{A}}{A} = x$

Zadanie 1. W ramach swojej pracy poza uniwersytetem im. Wielkiego Kanibala, Maestro Rokitek był również konsultantem ekonomicznym rozmaitych ministerstw. Dlatego też, nie było dla niego żadną niespodzianką, iż pewnego słonecznego dnia został poproszony o analizę długookresowych skutków przystąpienia Canibalii do Światowej Ligi Ludożerców. Najważniejszą korzyścią wejścia do Ligi miał być napływ środków przeznaczonych na rozwój infrastruktury w Canibalii. Dlatego też zadaniem Maestro Rokitka było:

- Pokazanie co stanie się ze stopą wzrostu gospodarczego, poziomem produkcji i kapitału per capita w efekcie napływu środków z Ligi;
- Analiza możliwych skutków przerwy w napływie środków po upływie jakiegoś czasu.

Analiza oparta miała być na neoklasycznym modelu wzrostu, zaś punktem wyjścia założenie o tym, że gospodarka Canibalii znajduje się na ścieżce zrównoważonego wzrostu. Ponieważ Maestro jak zwykle był przepracowany to postanowił sprawdzić jak powyższe zadanie rozwiążą jego studenci, których dodatkowo zdopingował wiadomością o tym, iż podobny problem może się pojawić na kolokwium…

Zadanie 2. Całkowite wynagrodzenie pracy w gospodarce wynosi 60, a wartość produkcji, której proces jest opisany prostą funkcją Cobba-Douglasa, wynosi 100. Tempo wzrostu PKB wynosi 10%, a tempo wzrostu zasobu kapitału i pracy, odpowiednio, 10% i 5%.
a) Jakie jest tempo wzrostu wieloczynnikowej produktywności w tej gospodarce (TFP)?
b) Powtórz obliczenia z (a) dla kosztów pracy równych 80 zamiast 60.
c) Wyprowadź wyrażenie na tempo wzrostu wieloczynnikowej produktywności, gdy funkcja produkcji ma postać $Y = AK^{\alpha}H^{\beta}T^{1-\alpha-\beta}$, gdzie T oznacza zasób gruntów ornych.

Zadanie 3. Maestro Rokitek otrzymał od ministra gospodarki w kraju o wdzięcznej nazwie Canibalia zadanie obliczenia stopy wzrostu PKB *per capita*. Dane jakie otrzymał od ministra wyglądają następująco:

Funkcja produkcji ma postać $Y = K^{2/3}(AL)^{1/3}$
Stopa oszczędności wynosi 0.24, stopa deprecjacji 0.03, stopa przyrostu naturalnego 0.01, zaś tempo postępu technicznego 0.02.
Dodatkową informacją jest to, iż K = 48000, A = 15 a L = 50

Maestro Rokitek spędził kilka bezsennych nocy ślęcząc nad zadaniem ale niestety nie udało mu się nic wymyślić. Dodatkowo dobił go psychicznie telefon od ministra, który zażyczył sobie aby pokazać mu co się stanie ze stopą wzrostu PKB *per capita* gdy nastąpi import nowych technologii prowadzący do wzrostu parametru A do 320/9 oraz zwiększenia tempa postępu technicznego do 0.03. Dlatego też postanowił dać powyższe zadanie do rozwiązania swoim studentom z nadzieją, że uchronią go oni od niechybnej śmierci w kuchni ministra...

Zadanie 4. Skomentuj stwierdzenie: „Z modelu Solowa wynika, że wielkość gospodarki mierzona poziomem PKB jest ujemnie zależna od tempa przyrostu naturalnego i stopy deprecjacji kapitału (krzywa efektywnej deprecjacji kapitału jest bardziej stroma i przecina krzywą oszczędności przy niższym poziomie kapitału)”.

Zadanie 5. Rozważmy dwa kraje, AA i BB, charakteryzujące się taką samą funkcją produkcji. Załóżmy, ze początkowo w obu krajach poziom kapitału pracy i technologii jest identyczny, a poziom kapitału na 1 zatrudnionego jest niższy niż w stanie ustalonym. W kraju AA stopa oszczędności jest równa 20%, a w kraju BB – wynosi 25%. W obu krajach tempo przyrostu naturalnego równa się 3% rocznie, stopa deprecjacji kapitału wynosi 5%, zaś tempo postępu technicznego to 3%. Zgodnie z przewidywaniami modelu Solowa:
a) Który z krajów, jeśli w ogóle, ma początkowo wyższą stopę wzrostu produkcji na 1 zatrudnionego. Dlaczego?
b) Który z krajów, jeśli w ogóle, ma wyższa stopę wzrostu produkcji na 1 zatrudnionego w stanie ustalonym. Dlaczego?
c) Jakie jest tempo wzrostu PKB w stanie ustalonym w obu krajach?

Zadanie 6. Załóżmy, że na ścieżce zrównoważonego wzrostu, kraj pustoszy trąba powietrzna, w wyniku czego liczba ludności maleje o 50%, natomiast zasób kapitału o 75%. Kataklizm nie powoduje zmiany stopy oszczędności, ani tempa przyrostu naturalnego, które wynosi n. Nie obserwujemy postępu technicznego, czyli g=0. Skorzystaj z własności funkcji produkcji i naszkicuj zmiany w czasie (przed i po przejściu trąby powietrznej)
a) kapitału i produkcji na 1 zatrudnionego (k oraz y)
b) zasobu siły roboczej N
c) zasobu kapitału K
d) poziomu dochodu Y
W niektórych przypadkach wskazane może być wykorzystanie logarytmów zmiennych.

Zadanie 7. Rozważmy gospodarkę, która znajdowała się na ścieżce wzrostu zrównoważonego W wyjątkowo deszczowym, listopadowym dniu stopa amortyzacji (fizycznego zużycia kapitału w procesie produkcji) wzrosła z poziomu 1 do poziomu 2 a ¼ pracowników rezygnuje z pracy i decyduje się na emigracje na słoneczne południe Europy. Stopa oszczędności, s, I tempo przyrostu naturalnego, n, pracowników pozostałych w kraju nie ulega zmianie. Wiadomo również, ze tempo postępu technicznego wynosi zero. Korzystając z modelu Solowa, naszkicuj ścieżki opisujące ewolucje w czasie:
a) kapitału na jednego zatrudnionego (k) i produkcji na jednego zatrudnionego (y);
b) całkowitego zasobu pracy (N), kapitału (K) i produkcji (Y) (wskazane wykorzystanie logarytmów).

Zadanie 8. Po uzyskaniu członkostwa w UE Polska otrzymała bezzwrotna pomoc w postaci maszyn i innego wyposażenia kapitałowego. Minister gospodarki, opierając się na wnioskach wyciągniętych z modelu Solowa, stwierdził ze społeczeństwo musi zacząć oszczędzać więcej, aby podarowany zasób kapitału zaowocował wyższym poziomem produkcji na 1 zatrudnionego. „Jeśli stopa oszczędności nie wzrośnie – mówił minister – powrócimy do wyjściowego poziomu produkcji, a w okresie przejściowym stopa wzrostu gospodarczego spadnie". Czy minister miał racje?

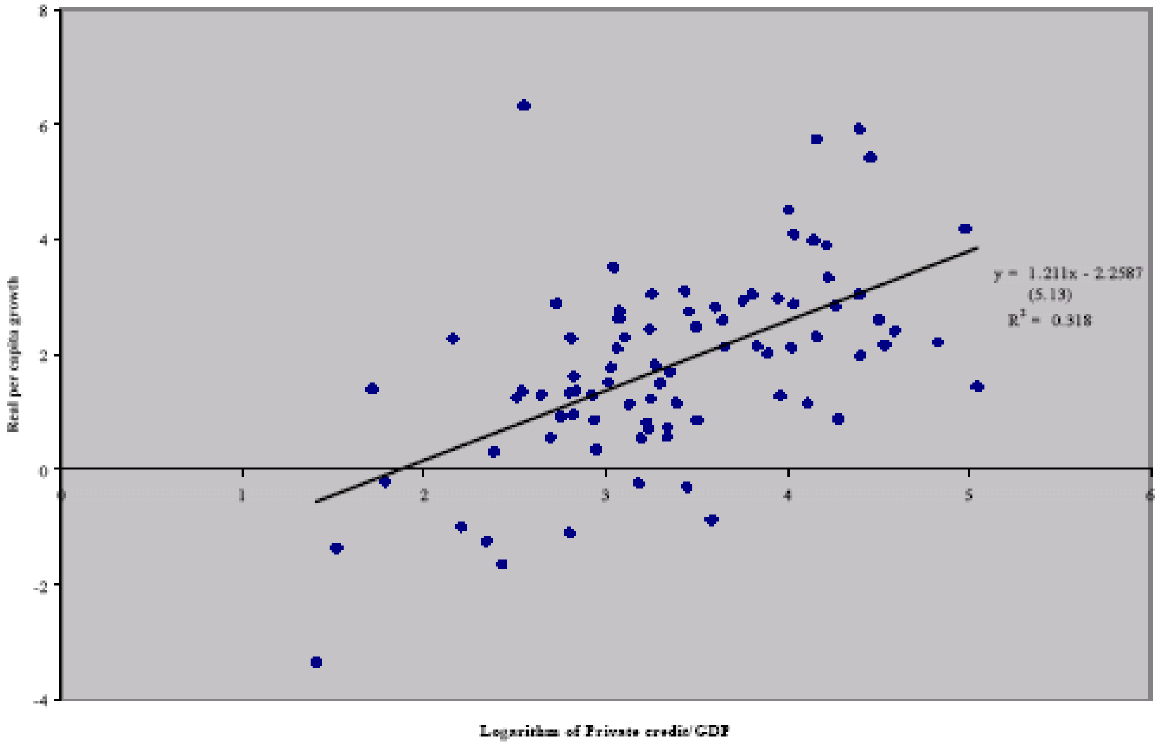
Zadanie 9. Stopa wzrostu produkcji całkowitej w pewnym okresie wynosi 0,07, stopa wzrostu zasobu kapitału jest równa 0,03. Tempo przyrostu naturalnego wynosi 0,01. Wiadomo, że funkcja produkcji ma postać Cobba-Douglasa $Y = K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha}$, gdzie K i N oznaczają nakłady pracy i kapitału, a parametr α=0,5. Korzystając z dekompozycji Solowa i modelu wzrostu jego autorstwa:
a) oblicz tempo postępu technologicznego
b) oblicz poziom wynagrodzenia za prace, przyjmując, że jest on równy krańcowemu produktowi pracy. Jeśli omawiana gospodarka znajdowała sie w stanie ustalonym, w jakim tempie rosną płace?

Zadanie 10. Funkcja produkcji wyrażona w kategoriach na 1 zatrudnionego ma postać $y = Ak^{\alpha}h^{1-\alpha}$ gdzie A – poziom zaawansowania technologicznego, parametr $0<\alpha<1$, y – produkcja na 1 zatrudnionego, k – kapitał fizyczny na 1 zatrudnionego, h – kapitał ludzki na 1 zatrudnionego, odzwierciedlający poziom wykształcenia, umiejętności i doświadczenia zawodowego pracowników. Stopa oszczędności wynosi s, zaś oszczędności są w całości przeznaczane na odtworzenie i powiększanie zasobu kapitału fizycznego, którego stopa deprecjacji wynosi d. Kapitał ludzki jest akumulowany podczas uczestnictwa w procesie produkcji – im większy zasób kapitału fizycznego, który przypada na 1 zatrudnionego tym szybciej rosną jego kwalifikacje: h = Bk , gdzie B jest parametrem. Tempo przyrostu naturalnego i postępu technicznego wynoszą zero.
a) Wyprowadź wzór na wartość łącznej produkcji Y w omawianej gospodarce. Oblicz wielkość całkowitych oszczędności w gospodarce, pamiętając że stopa oszczędności wynosi s. Uwzględniając fakt, że oszczędności są w całości przeznaczane na odtworzenie i powiększanie zasobu kapitału fizycznego, oblicz tempo wzrostu zasobu całkowitego kapitału fizycznego K, ludzkiego H, oraz całkowitej produkcji Y;
b) Jaki będzie wpływ wzrostu stopy oszczędności na tempo wzrostu całkowitej produkcji w omawianej gospodarce. Porównaj otrzymany wynik z wpływem wzrostu stopy oszczędności w modelu Solowa z neoklasyczną funkcją produkcji y = Ak , nie uwzględniającą kapitału ludzkiego. Z czego wynika różnica?

Zadanie 11. Rozważmy model Solowa z kapitałem ludzkim w ujęciu Mankiw, Romera i Weila, którzy przyjmują następującą postać funkcji produkcji: $Y = K^{\alpha}H^{\beta}(AN)^{1-\alpha-\beta}$ gdzie Y to wielkość produkcji, K oraz H oznacza poziom kapitału, odpowiednio, fizycznego i ludzkiego, A jest miarą zaawansowania technologicznego, zaś N to zasób siły roboczej. Produkowane dobro jest homogeniczne i może być albo skonsumowane, albo przeznaczone na inwestycje w kapitał ludzki lub fizyczny. Stopy inwestycji w oba rodzaje kapitału są stałe i równe sH oraz sK.
a) Zapisz funkcje produkcji w postaci intensywnej, wyrażając wszystkie zmienne w kategoriach na jednostkę efektywnej pracy AN;
b) Zapisz równania opisujące dynamikę $\hat{k} = K/AN$ oraz $\hat{h} = H/AN$, czyli równania na $\dot{\hat{k}}$ i $\dot{\hat{h}}$, przyjmując ze stopa deprecjacji obu rodzajów kapitału wynosi d;
c) Oblicz wartości $\hat{k}$, $\hat{h}$ oraz $\hat{y}$ w stanie ustalonym.

Zadanie 12. Porównaj ewolucje produkcji na 1 zatrudnionego (sporządź wykres lny względem czasu) w modelu Solowa bez postępu technicznego oraz modelu AK przed i po następujących zdarzeniach:
a) Wzrost tempa przyrostu naturalnego
b) Spadek stopy oszczędności
c) Wzrost (jednorazowy) wartości parametru A
d) Spadek liczby ludności w wyniku emigracji

Zadanie 13. Stopień rozwoju finansowego wpływa na wzrost gospodarczy. Fakt ten jest zilustrowany na poniższym wykresie, który pokazuje zależność miedzy średnim tempem wzrostu realnego PKB per capita i stosunkiem kredytów dla sektora prywatnego do PKB (miara rozwoju finansowego) w okresie 1960-2000 w grupie 82 krajów.
a) Jaki jest wpływ rozwoju finansowego na tempo wzrostu gospodarczego w świetle danych przedstawionych na wykresie? Czy możliwa jest inna interpretacja przedstawionej zależności, zgodnie z którą wyższy poziom wzrostu gospodarczego powoduje ekspansję kredytową? (Podpowiedź: wykorzystaj poznane teorie konsumpcji i inwestycji, żeby określić związek między oczekiwanymi zmianami dochodu a wartością zaciągniętych kredytów).



b) Obserwując zależność między początkowym stopniem rozwoju finansowego a późniejszym wzrostem gospodarczym można dojść do wniosku, że rozwój finansowy powoduje wzrost gospodarczy (a nie odwrotnie). Zjawisko to można wyjaśnić odwołując się do modelu wzrostu AK. Wyższy stopień rozwoju rynku finansowego redukuje koszty transakcyjne przekształcenia oszczędności w inwestycje. Na rynkach słabiej rozwiniętych odsetek (1–f) jest tracony przez nieefektywnie działające instytucje pośrednictwa finansowego i jedynie odsetek f jest przeznaczony na inwestycje. Pokaż, korzystając z modelu AK, że wzrost parametru f podniesie tempo wzrostu gospodarczego produktu na 1 zatrudnionego.