

Statystyka Matematyczna

Anna Janicka

wykład XI, 16.05.2016

**TESTOWANIE HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH III:
TESTY ISTOTNOŚCI**

Plan na dzisiaj

0. Test ilorazowy – przypomnienie

1. Przykłady testów ilorazowych:

- Model I: Porównanie średniej z normą w modelu normalnym: wersje jedno- i dwustronne, σ^2 znane
- Model II: Porównanie średniej z normą w modelu normalnym: wersje jedno- i dwustronne, σ^2 nieznane
+ Porównanie wariancji z normą w modelu normalnym: wersje jedno- i dwustronne
- Model III: Porównanie średniej z normą, duże próby
- Model IV: Porównanie wsp. struktury z normą, duże próby

2. Asymptotyczne własności testu ilorazowego

3. Testy randomizowane

4. Testy parametryczne dla więcej niż jednej populacji



Test ilorazowy dla hipotez prostych.

Lemat Neymana-Pearsona – przypomnienie

Testujemy $H_0: X \sim f_0$ przeciw $H_1: X \sim f_1$

Niech
$$K^* = \left\{ x \in X : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > c \right\}$$

t. że $P_0(K^*) = \alpha$ i $P_1(K^*) = 1 - \beta$

Wówczas dla dowolnego zbioru $K \subseteq X$:

jeśli $P_0(K) \leq \alpha$, to $P_1(K) \leq 1 - \beta$.

(tzn. test o obszarze krytycznym K^* jest testem (jednostajnie)
najmocniejszym do testowania hipotezy H_0 przeciw H_1)



Test ilorazu wiarygodności dla hipotez złożonych – przypomnienie

$H_0: X \sim f_0(\theta_0, \cdot)$ dla pewnego $\theta_0 \in \Theta_0$,

$H_1: X \sim f_1(\theta_1, \cdot)$ dla pewnego $\theta_1 \in \Theta_1$,

Statystyka testowa: $\lambda = \frac{f_1(\hat{\theta}_1, X)}{f_0(\hat{\theta}_0, X)}$ lub $\tilde{\lambda} = \frac{f(\hat{\theta}, X)}{f_0(\hat{\theta}_0, X)}$

gdzie $\hat{\theta}, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ są estymatorami ENW odpowiednio w modelu bez ograniczeń, opisanym przez hipotezę zerową oraz hipotezę alternatywną

Odrzucamy H_0 jeśli $\lambda > c$ lub $\tilde{\lambda} > \tilde{c}$ (stałe wyznaczone odpowiednio do poz. istotności)



Test ilorazu wiarygodności: szczególne przypadki

Konkretna postać testu zależy od rozkładów.

Często wyznaczenie rozkładu statystyki testowej jest trudne/żmudne (w wielu przypadkach korzysta się z asymptotycznych własności testu ilorazowego)



Uwaga na notację:

$x_{\text{coś}}$ **zawsze** oznacza kwantyl rzędu coś



Model I: porównanie z normą

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym σ^2 jest **znane**

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Statystyka testowa: $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0,1)$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu > \mu_0$$

$$\text{zbiór krytyczny } K^* = \{x : U(x) > u_{1-\alpha}\}$$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu < \mu_0$$

$$\text{zbiór krytyczny } K^* = \{x : U(x) < u_\alpha = -u_{1-\alpha}\}$$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\text{zbiór krytyczny } K^* = \{x : |U(x)| > u_{1-\alpha/2}\}$$



Model I: przykład

Niech $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ będą próbą IID z rozkładu $N(\mu, 1)$:

-1,21 -1,37 0,51 0,37 -0,75 0,44 1,20 -0,96 -1,14 -1,40

Czy $\mu=0$? (dla $\alpha = 0,05$)

W próbie: średnia = -0,43, wariancja = 0,92

Statystyka testowa:
$$U = \frac{-0,43 - 0}{1} \sqrt{10} \approx -1,36$$

$H_0: \mu = 0$ przeciw $H_1: \mu \neq 0$, $u_{0,975} \approx 1,96$ (p-value $\approx 0,172$)

$H_0: \mu = 0$ przeciw $H_1: \mu < 0$, $u_{0,95} \approx -1,64$ (p-value $\approx \underline{0,086}$)

$H_0: \mu = 0$ przeciw $H_1: \mu > 0$, $u_{0,95} \approx 1,64$ (p-value $\approx 0,914$)

→ w żadnym przypadku nie ma podstaw do
odrzućcenia H_0 (dla $\alpha = 0,05$; dla $\alpha = 0,1$ byłyby)

Model II: porównanie z normą (średnia)

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym σ^2 jest **nieznane**

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu > \mu_0$$

$$\text{zbiór krytyczny } K^* = \{x : T(x) > t_{1-\alpha}(n-1)\}$$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu < \mu_0$$

$$\text{zbiór krytyczny } K^* = \{x : T(x) < t_{\alpha}(n-1)\}$$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\text{zbiór krytyczny } K^* = \{x : |T(x)| > t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$$



$$t_{\alpha}(n-1) = -t_{1-\alpha}(n-1)$$

Model II: przykład (średnia)

Niech $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ będą próbą z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$:

-1,21 -1,37 0,51 0,37 -0,75 0,44 1,20 -0,96 -1,14 -1,40

Czy $\mu=0$? (dla $\alpha = 0,05$)

W próbie: średnia = -0,43, wariancja = 0,92

Statystyka testowa: $U = \frac{-0,43 - 0}{0,92} \sqrt{10} \approx -1,36$

$H_0: \mu = 0$ przeciw $H_1: \mu \neq 0$, $t_{0,975} \approx 2,26$ (p-value $\approx 0,207$)

$H_0: \mu = 0$ przeciw $H_1: \mu < 0$, $u_{0,95} \approx -1,83$ (p-value $\approx 0,103$)

$H_0: \mu = 0$ przeciw $H_1: \mu > 0$, $u_{0,95} \approx 1,83$ (p-value $\approx 0,897$)

→ w żadnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia

H_0 (dla $\alpha = 0,05$)



Model II: porównanie z normą (wariancja)

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym σ^2 jest **nieznane**

$H_0: \sigma = \sigma_0$
Statystyka testowa: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

$H_0: \sigma = \sigma_0$ przeciw $H_1: \sigma > \sigma_0$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : \chi^2(x) > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\}$

$H_0: \sigma = \sigma_0$ przeciw $H_1: \sigma < \sigma_0$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : \chi^2(x) < \chi_{\alpha}^2(n-1)\}$

$H_0: \sigma = \sigma_0$ przeciw $H_1: \sigma \neq \sigma_0$

~~zbiór krytyczny $K^* = \{x : \chi^2(x) < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$~~

$\vee \chi^2(x) > \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\}$



Model II: przykład (wariancja)

Niech $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ będą próbą z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$:

-1,21 -1,37 0,51 0,37 -0,75 0,44 1,20 -0,96 -1,14 -1,40

Czy $\sigma^2 = 1$? (dla $\alpha = 0,05$)

W próbie: wariancja = 0,92

Statystyka testowa: $\chi^2 = \frac{9 \cdot 0,92}{1} \approx 8,28$

$H_0: \sigma = 1$ przeciw $H_1: \sigma > 1$ $\chi_{0,95}^2 \approx 16,92$

$H_0: \sigma = 1$ przeciw $H_1: \sigma < 1$ $\chi_{0,05}^2 \approx 3,33$

$H_0: \sigma = 1$ przeciw $H_1: \sigma \neq 1$ $\chi_{0,025}^2 \approx 2,70$; $\chi_{0,975}^2 \approx 19,02$

→ w żadnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia H_0 (dla $\alpha = 0,05$)



Model III: porównanie z normą

Model asymptotyczny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu mającego średnią (μ) oraz wariancję (nieznaną), n – duże.

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Statystyka testowa:
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

ma dla dużych n w *przybliżeniu* rozkład $N(0,1)$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu > \mu_0$$

zbiór krytyczny
$$K^* = \{x : T(x) > u_{1-\alpha}\}$$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu < \mu_0$$

zbiór krytyczny
$$K^* = \{x : T(x) < u_\alpha = -u_{1-\alpha}\}$$

$$H_0: \mu = \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu \neq \mu_0$$

zbiór krytyczny
$$K^* = \{x : |T(x)| > u_{1-\alpha/2}\}$$



Model IV: porównanie z normą

Model asymptotyczny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu dwupunktowego, n – duże.

$$P_p(X = 1) = p = 1 - P_p(X = 0)$$

$$H_0: p = p_0 \quad U^* = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n}$$

Statystyka testowa:

ma w *przybliżeniu* rozkład $N(0,1)$

$H_0: p = p_0$ przeciw $H_1: p > p_0$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : U(x) > u_{1-\alpha}\}$

$H_0: p = p_0$ przeciw $H_1: p < p_0$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : U(x) < u_\alpha = -u_{1-\alpha}\}$

$H_0: p = p_0$ przeciw $H_1: p \neq p_0$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : |U(x)| > u_{1-\alpha/2}\}$



Model IV: przykład

Rzucamy 400 razy monetą. Wypada 180 orłów. Czy moneta jest symetryczna?

$$H_0: p = 1/2 \quad U^* = \frac{(180 / 400 - 1/2)}{\sqrt{1/2(1-1/2)}} \sqrt{400} = -2$$

dla $\alpha = 0,05$ i $H_1: p \neq 1/2$ mamy $u_{0,975} = 1,96 \rightarrow$ odrzucamy H_0

dla $\alpha = 0,01$ i $H_1: p \neq 1/2$ mamy $u_{0,995} = 2,58$

$\rightarrow$ nie odrzucamy H_0

dla $\alpha = 0,01$ i $H_1: p < 1/2$ mamy $u_{0,01} = -u_{0,99} = -2,33$

$\rightarrow$ nie odrzucamy H_0

p-wartość dla $H_1: p \neq 1/2$: 0,044

p-wartość dla $H_1: p < 1/2$: 0,022



Asymptotyczne własności testu ilorazowego

Rozpatrujemy dwa modele zagnieżdżone, testujemy

$H_0: h(\theta) = 0$ przeciw $H_1: h(\theta) \neq 0$

Przy założeniu, że

- h jest dostatecznie porządna
- Θ jest zbiorem d -wymiarowym
- $\Theta_0 = \{\theta: h(\theta) = 0\}$ jest zbiorem o wymiarze $d - p$

Tw. Jeśli H_0 prawdziwa, to przy $n \rightarrow \infty$ rozkład statystyki $2\ln \tilde{\lambda}$ zmierza do rozkładu chi-kwadrat z p stopniami swobody



Asymptotyczne własności testu ilorazowego – przykład.

Model wykładniczy: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu wykładniczego $\text{Exp}(\theta)$.

Testujemy $H_0: \theta = 1$ przeciw $H_1: \theta \neq 1$

$$ENW(\theta) = \hat{\theta} = 1/\bar{X}$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\prod f_{\hat{\theta}}(x_i)}{\prod f_1(x_i)} = \frac{\frac{1}{\bar{X}^n} \exp(-\frac{1}{\bar{X}} \sum x_i)}{\exp(-\sum x_i)} = \frac{1}{\bar{X}^n} \exp(n(\bar{X} - 1))$$

dalej: $\tilde{\lambda} > \tilde{c} \Leftrightarrow 2\ln \tilde{\lambda} > 2\ln \tilde{c}$

z tw.: $2\ln \tilde{\lambda} = 2n((\bar{X} - 1) - \ln \bar{X}) \xrightarrow{D} \chi^2(1)$

dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ mamy $\chi_{0,95}^2(1) \approx 3,84 \approx 2\ln \tilde{c}$

a więc odrzucimy H_0 na rzecz H_1 gdy $\tilde{\lambda} > e^{3,84/2}$



Randomizacja testu

Czasem może nie być testu o poziomie istotności równym dokładnie α (np. dla zmiennych o rozkładach dyskretnych).

Wówczas rozwiązaniem jest *randomizacja*.

(TJNM, o ile jest, musi być zrandomizowany).

np. liczba orłów w 8 rzutach, $H_0 : p = 1/2$, $H_1 : p < 1/2$, $\alpha=0,05$:

xi	0	1	2	3	4	5	6	7	8
pi	0,004	0,03	0,11	0,22	0,27	0,22	0,11	0,03	0,004
suma pi	0,004	0,04	0,15	0,36	0,64	0,86	0,97	0,996	1,000

$X \leq 1$ odrzucamy, $X > 2$ OK, $X = 2$: $p = 1/11$ odrzucamy

Porównywanie dwóch i więcej populacji

Zastanawiamy się, czy populacje są pod pewnymi względami „takie same”:

- ☐ testy parametryczne: badamy równość konkretnych parametrów rozkładów
- ☐ testy nieparametryczne: sprawdzamy, czy rozkłady są takie same



Model I: porównanie średnich, poziom istotności α

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_{n_X}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_Y}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, σ_X^2, σ_Y^2 są **znane**, próby niezależne.

$$H_0: \mu_X = \mu_Y$$

Statystyka testowa:
$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \sim N(0,1)$$

przy założeniu
prawdziwości H_0

$$H_0: \mu_X = \mu_Y \text{ przeciw } H_1: \mu_X > \mu_Y$$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : U(x) > u_{1-\alpha}\}$

$$H_0: \mu_X = \mu_Y \text{ przeciw } H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : |U(x)| > u_{1-\alpha/2}\}$



Model I – porównanie średnich. Przykład

$X_1, X_2, \dots, X_{10}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_X, 11^2)$,

$Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_Y, 13^2)$

Na podstawie próby:

$$\bar{X} = 501, \bar{Y} = 498$$

Czy średnie są równe, na poziomie istotności 0,05?

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ przeciw $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

$$U = \frac{501 - 498}{\sqrt{\frac{13^2}{10} + \frac{11^2}{10}}} \approx 0,557$$

mamy: $u_{0,975} \approx 1,96$.

$|0,557| < 1,96 \rightarrow$ nie ma podstaw
do odrzucenia H_0 o równości średnich



Model II: porównanie średnich, wariancje nieznane, wariancje równe, poziom istotności α

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_{n_X}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_X, \sigma^2)$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_Y}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_Y, \sigma^2)$ przy czym σ^2 **nieznane**, próby niezależne

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ Statystyka testowa:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y} (n_X + n_Y - 2)} \sim t(n_X + n_Y - 2)$$

przy założeniu prawdziwości H_0

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ przeciw $H_1: \mu_X > \mu_Y$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : T(x) > t_{1-\alpha}(n_X + n_Y - 2)\}$

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ przeciw $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

zbiór krytyczny $K^* = \{x : |T(x)| > t_{1-\alpha/2}(n_X + n_Y - 2)\}$



WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences

$$S_X^2 = \frac{1}{n_X - 1} \sum_{i=1}^{n_X} (X_i - \bar{X})^2, S_Y^2 = \frac{1}{n_Y - 1} \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \bar{Y})^2$$

Model II: porównanie średnich, wariancje nieznane, wariancje równe, cd.

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}} (n_X + n_Y - 2) \sim t(n_X + n_Y - 2)$$

można też zapisać jako

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_* \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim t(n_X + n_Y - 2)$$

gdzie

$$S_*^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

jest estymatorem wariancji σ^2 opartym na obu próbach



Model II: porównanie wariancji, poziom istotności α

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_{n_X}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_Y}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, σ_X^2, σ_Y^2 są **nieznane**, próby niezależne

$$H_0: \sigma_X = \sigma_Y \quad F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n_X - 1, n_Y - 1)$$

Statystyka testowa:

$$H_0: \sigma_X = \sigma_Y \text{ przeciw } H_1: \sigma_X > \sigma_Y$$

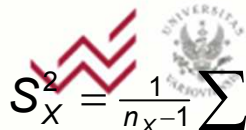
przy założeniu
prawdziwości H_0

$$\text{zbiór krytyczny} \quad K^* = \{x : F(x) > F_{1-\alpha}(n_X - 1, n_Y - 1)\}$$

$$H_0: \sigma_X = \sigma_Y \text{ przeciw } H_1: \sigma_X \neq \sigma_Y$$

$$\text{zbiór krytyczny} \quad K^* = \{x : F(x) < F_{\alpha/2}(n_X - 1, n_Y - 1)$$

$$\vee F(x) > F_{1-\alpha/2}(n_X - 1, n_Y - 1)\}$$


$$S_X^2 = \frac{1}{n_X - 1} \sum_{i=1}^{n_X} (X_i - \bar{X})^2, S_Y^2 = \frac{1}{n_Y - 1} \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \bar{Y})^2$$

Model II: porównanie średnich, wariancje nieznane i nie zakładamy ich równości

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_{n_X}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_Y}$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, σ_X^2, σ_Y^2 są **nieznane**, próby nzał.

$$H_0: \mu_X = \mu_Y$$

Statystyka testowa bardzo prosta:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} \sim ?$$

nie da się wyznaczyć statystyki testowej tak, żeby jej rozkład nie zależał od konkretnych wartości $\sigma_X^2, \sigma_Y^2 \dots$

$$S_X^2 = \frac{1}{n_X - 1} \sum_{i=1}^{n_X} (X_i - \bar{X})^2, S_Y^2 = \frac{1}{n_Y - 1} \sum_{i=1}^{n_Y} (Y_i - \bar{Y})^2$$

Model III: porównanie średnich dla dużych prób, poziom istotności α

Model asymptotyczny: $X_1, X_2, \dots, X_{n_X}$ są próbą IID z rozkładu mającego średnią μ_X , $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_Y}$ są próbą IID z rozkładu mającego średnią μ_Y , oba rozkłady mają nieznaną wariancję, próby niezależne, n_X, n_Y – duże.

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ Statystyka testowa:

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} \sim N(0,1)$$

przy założeniu
prawdziwości H_0 ,
w przybliżeniu
dla dużych prób

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ przeciw $H_1: \mu_X > \mu_Y$
zbiór krytyczny

$$K^* = \{x : U(x) > u_{1-\alpha}\}$$

$H_0: \mu_X = \mu_Y$ przeciw $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$
zbiór krytyczny

$$K^* = \{x : |U(x)| > u_{1-\alpha/2}\}$$



Model III – przykład (równość średnich ocen?)

167 studentów zdaje egzamin z RP w I terminie. Czy uczestnictwo w wykładach się opłacało? ($\alpha = 0,05$)

W grupie osób, które były 3 razy (93 osoby):

średnia = 3, wariancja = 0,70;

W grupie osób, które były mniej niż 3 razy (74 osoby):

średnia = 2,72, wariancja = 0,69.

Wartość statystyki testowej

$$U = \frac{3 - 2,72}{\sqrt{0,70/93 + 0,69/74}} \approx 2,13$$

p-value testu jednostronnego: 0,017 → odrzucamy hipotezę o równości średnich



Model IV: porównanie parametrów struktury, na poziomie istotności α

Model asymptotyczny: dwie próby IID z rozkładów dwupunktowych. X – liczba sukcesów w n_X próbach z p-stwem sukcesu p_X , Y – liczba sukcesów w n_Y próbach z p-stwem sukcesu p_Y . p_X i p_Y nieznane, n_X i n_Y duże.

$$H_0: p_X = p_Y$$

Statystyka testowa:
$$U^* = \frac{\frac{X}{n_X} - \frac{Y}{n_Y}}{\sqrt{p_*(1-p_*)\left(\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}\right)}} \sim N(0,1)$$

gdzie $p^* = \frac{X+Y}{n_X+n_Y}$

przy założeniu prawdziwości H_0 ,
w przybliżeniu dla dużych prób

$$H_0: p_X = p_Y \text{ przeciw } H_1: p_X > p_Y$$

zbiór krytyczny

$$K^* = \{x : U^*(x) > u_{1-\alpha}\}$$

$$H_0: p_X = p_Y \text{ przeciw } H_1: p_X \neq p_Y$$

zbiór krytyczny

$$K^* = \{x : |U^*(x)| > u_{1-\alpha/2}\}$$



Model III – przykład (p-stwo zdania?)

167 studentów zdaje egzamin z RP w I terminie. Czy uczestnictwo w wykładach się opłacało? ($\alpha = 0,05$)

W grupie osób, które były 3 razy (93 osoby):

zdały: 64 osoby (68,8%);

W grupie osób, które były mniej niż 3 razy (74 osoby):

zdało: 36 osób (48,6%).

Wartość statystyki testowej

$$U = \frac{0,688 - 0,486}{\sqrt{100/167 \cdot 67/167 \cdot (1/93 + 1/74)}} \approx 2,55$$

p-value testu jednostronnego: 0,005 → odrzucamy

hipotezę o równości prawdopodobieństw



WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences