

Statystyka Matematyczna

Anna Janicka

wykład X, 9.05.2016

**TESTOWANIE HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH II:
PORÓWNYWANIE TESTÓW**

Plan na dzisiaj

0. Przypomnienie potrzebnych definicji
1. Porównywanie testów
2. Test jednostajnie najmocniejszy
3. Test ilorazowy dla hipotez prostych:
lemat Neymana-Pearsona
4. Przykłady testów dla hipotez prostych (i uogólnienia)



Definicje – przypomnienie

Testujemy $H_0: \theta \in \Theta_0$ przeciw $H_1: \theta \in \Theta_1$

K – obszar krytyczny testu, zbiór wyników, przy których odrzucamy H_0 , $K = \{x \in X : \delta(x) = 1\}$

Test jest na **poziomie istotności** α , jeśli dla każdego $\theta \in \Theta_0$ mamy $P_\theta(K) \leq \alpha$.

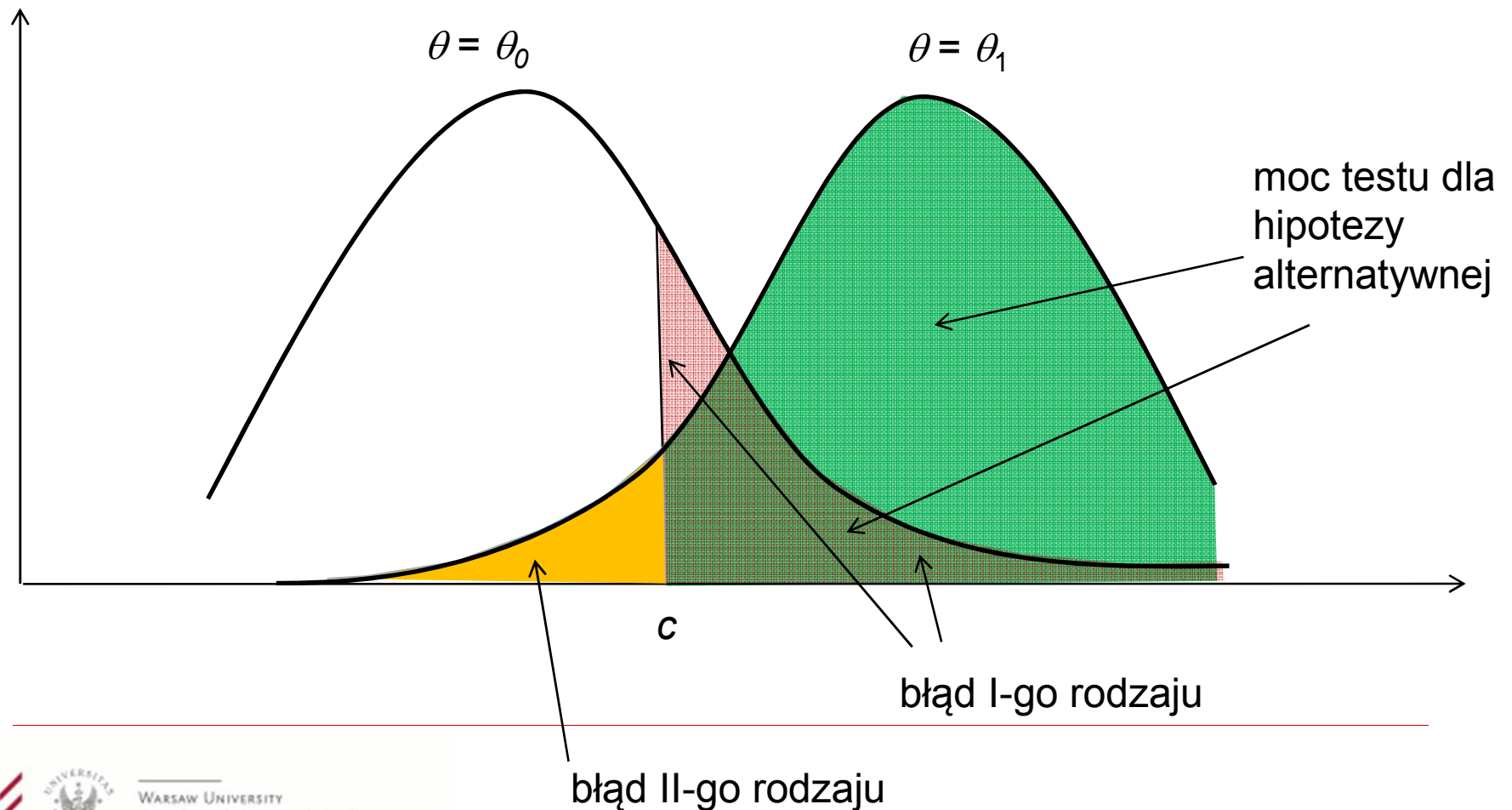
$P_\theta(K)$ dla $\theta \in \Theta_1$ – moc testu (przy hipotezie alternatywnej)

decyzja	Stan faktyczny	
	H_0 prawdziwa	H_0 fałszywa
odrzuć H_0	błąd I-go rodzaju	OK
nie odrzucać H_0	OK	błąd II-go rodzaju



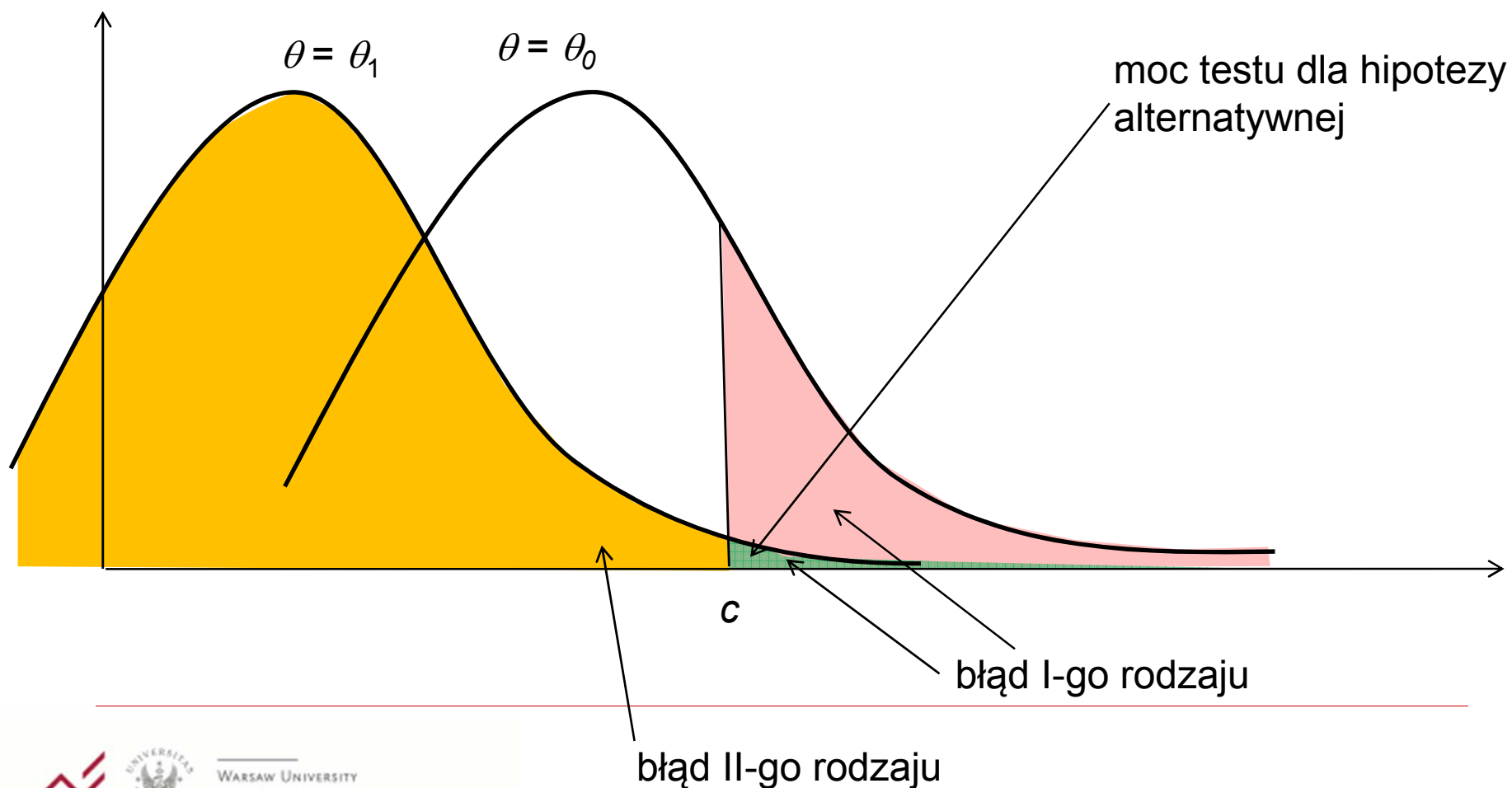
Przypomnienie: interpretacja graficzna

rozkłady statystyki testowej przy założeniu prawdziwości
hipotezy zerowej i alternatywnej



Przykład złego testu

rozkłady statystyki testowej przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej i alternatywnej



Porównywanie testów

Jak wybrać najlepszy test?

dla ustalonych hipotez zerowej i alternatywnej

dla ustalonego poziomu istotności

(„konserwatyzmu badacza”)

→ lepszy jest test, który jest *mocniejszy*



Porównywanie mocy testów

$X \sim P_\theta$, $\{P_\theta: \theta \in \Theta\}$ – rodzina rozkładów

Testujemy $H_0: \theta \in \Theta_0$ przeciw $H_1: \theta \in \Theta_1$

t. że $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

dwoma testami o obszarach krytycznych K_1 i K_2 ; oba na poziomie istotności α .

Test o obszarze krytycznym K_1 jest **mocniejszy** niż test o obszarze krytycznym K_2 , jeśli

$$\forall \theta \in \Theta_1 : P_\theta(K_1) \geq P_\theta(K_2)$$

$$\text{oraz } \exists \theta_1 \in \Theta_1 : P_{\theta_1}(K_1) > P_{\theta_1}(K_2)$$



Test jednostajnie najmocniejszy

Dla ustalonych $H_0: \theta \in \Theta_0$ i $H_1: \theta \in \Theta_1$:

δ^* jest **testem jednostajnie najmocniejszym** (TJNM) na poziomie istotności α , jeśli

- 1) δ^* jest testem na poziomie istotności α ,
- 2) dla każdego testu δ na poziomie istotności α , mamy, dla każdego $\theta \in \Theta_1$:

$$P_{\theta}(\delta^*(X)=1) \geq P_{\theta}(\delta(X)=1)$$

tzn. moc testu δ^* jest nie mniejsza niż moc każdego innego testu tych samych hipotez, dla dowolnego $\theta \in \Theta_1$ jeśli Θ_1 jest jednoelementowy, niepotrzebne jest słowo „jednostajnie”



Test jednostajnie najmocniejszy – sformułowanie z obszarem krytycznym

Dla ustalonych $H_0: \theta \in \Theta_0$ i $H_1: \theta \in \Theta_1$:

Test o obszarze krytycznym K^* jest **testem jednostajnie najmocniejszym** (TJNM) na poziomie istotności α , jeśli

1) Test o obszarze krytycznym K^* jest testem na poziomie istotności α , tzn.

$$\text{dla każdego } \theta \in \Theta_0: P_{\theta}(K^*) \leq \alpha,$$

2) dla każdego testu o obszarze krytycznym K na poziomie istotności α , mamy dla każdego $\theta \in \Theta_1$:

$$P_{\theta}(K^*) \geq P_{\theta}(K)$$



Testowanie hipotez prostych

Obserwujemy X . Chcemy testować

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ przeciw } H_1: \theta = \theta_1.$$

(dwie hipotezy proste)

Możemy zapisać to jako:

$$H_0: X \sim f_0 \text{ przeciw } H_1: X \sim f_1,$$

gdzie f_0 i f_1 to gęstości rozkładów opisanych
przez θ_0 i θ_1 (tj. P_0 i P_1)



Test ilorazowy dla hipotez prostych.

Lemat Neymana-Pearsona

Niech $K^* = \left\{ x \in X : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} > c \right\}$

t. że $P_0(K^*) = \alpha$ i $P_1(K^*) = 1 - \beta$

Wówczas dla dowolnego zbioru $K \subseteq X$:

jeśli $P_0(K) \leq \alpha$, to $P_1(K) \leq 1 - \beta$.

(tzn. test o obszarze krytycznym K^* jest testem (jednostajnie) najmocniejszym do testowania hipotezy H_0 przeciw H_1)

Często łatwiej obszar krytyczny zapisać jako

$$K^* = \{x: \ln f_1(x) - \ln f_0(x) > c_1\}$$

Test ilorazowy (ilorazu funkcji wiarygodności): przyrównujemy iloraz szans do pewnej stałej, jeśli „zły” to odrzucamy H_0



Lemat Neymana-Pearsona – Przykład 1

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym σ^2 jest znane

Test najmocniejszy dla

$$H_0: \mu = 0 \text{ przeciw } H_1: \mu = 1. \quad \leftarrow \mu_0 < \mu_1$$

Rozw: na poziomie istotności α :

$$K^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{X} > \frac{u_{1-\alpha} \sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

Np. dla obs. 1,37; 0,21; 0,33; -0,45; 1,33; 0,85; 1,78; 1,21; 0,72 z $N(\mu, 1)$ mamy, dla $\alpha = 0,05$:

$$\bar{X} \approx 0,82 > \frac{1,645 \cdot 1}{\sqrt{9}} \approx 0,54$$

→ odrzucamy H_0



Lemat Neymana-Pearsona – Przykład 1 cd.

Moc testu dla hipotezy alternatywnej

$$\begin{aligned} P_1(K^*) &= P\left(\bar{X} > 1,645\sigma / \sqrt{n} \mid \mu = 1\right) = \dots \\ &= 1 - \Phi\left(1,645 - \mu_1 \cdot \sqrt{n} / \sigma\right) \approx 0,91 \end{aligned}$$

Gdy zmieniamy α , μ_1 , n – moc testu....



Lemat Neymana-Pearsona: Uogólnienie przykładu 1

Ten sam test jest TJNM dla $H_1: \mu > 0$ oraz dla
 $H_0: \mu \leq 0$ przeciw $H_1: \mu > 0$

ogólniej: przy pewnych dodatkowych założeniach dot.
rodziny rozkładów, analogiczna postać testu jest
TJNM dla testów jednostronnych

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu > \mu_0$$

Uwaga: zmiana kierunku nierówności w obszarze
krytycznym gdy testujemy

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \text{ przeciw } H_1: \mu < \mu_0$$



Lemat Neymana-Pearsona – Przykład 2

Model wykładniczy: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $\exp(\lambda)$, $n = 10$.

Test najmocniejszy dla

$$H_0: \lambda = 1/2 \text{ przeciw } H_1: \lambda = 1/4.$$

Rozw: na poziomie istotności $\alpha = 0,05$:

$$K^* = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) : \sum x_i > 31,41\}$$

Np. dla danych: 2; 0,9; 1,7; 3,5; 1,9; 2,1; 3,7; 2,5; 3,4; 2,8:

$\Sigma = 24,5 \rightarrow$ nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .



WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences

$$\exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$$

$$\Gamma(a, \lambda) + \Gamma(b, \lambda) = \Gamma(a + b, \lambda)$$

$$\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$$

Lemat Neymana-Pearsona – Przykład 2'

Model wykładniczy: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $\exp(\lambda)$, $n = 10$.

Test najmocniejszy dla

$$H_0: \lambda = 1/2 \text{ przeciw } H_1: \lambda = 3/4.$$

Rozw: na poziomie istotności $\alpha = 0,05$:

$$K^* = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{10}) : \sum x_i < 10,85 \right\}$$

Np. dla danych: 2; 0,9; 1,7; 3,5; 1,9; 2,1; 3,7; 2,5; 3,4; 2,8:

$\Sigma = 24,5 \rightarrow$ nie ma podstaw do odrzucenia H_0 .



WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences

$$\exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$$

$$\Gamma(a, \lambda) + \Gamma(b, \lambda) = \Gamma(a + b, \lambda)$$

$$\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$$

Przykład 2 cd.

Test

$$K^* = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) : \sum x_i > 31,41\}$$

jest TJNM dla $H_0: \lambda \geq \frac{1}{2}$ przeciw $H_1: \lambda < \frac{1}{2}$

Test

$$K^* = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) : \sum x_i < 10,85\}$$

jest TJNM dla $H_0: \lambda \leq \frac{1}{2}$ przeciw $H_1: \lambda > \frac{1}{2}$



Test ilorazu wiarygodności dla hipotez złożonych

$X \sim P_\theta$, $\{P_\theta: \theta \in \Theta\}$ – rodzina rozkładów

Testujemy $H_0: \theta \in \Theta_0$ przeciw $H_1: \theta \in \Theta_1$

t. że $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

Niech

$H_0: X \sim f_0(\theta_0, \cdot)$ dla pewnego $\theta_0 \in \Theta_0$,

$H_1: X \sim f_1(\theta_1, \cdot)$ dla pewnego $\theta_1 \in \Theta_1$,

gdzie f_0 i f_1 to rodziny gęstości rozkładów (dla $\theta \in \Theta_0$ oraz $\theta \in \Theta_1$, odpowiednio)



Test ilorazu wiarygodności dla hipotez złożonych – cd.

Statystyka testowa: $\lambda = \frac{\sup_{\theta_1 \in \Theta_1} f_1(\theta_1, X)}{\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} f_0(\theta_0, X)}$

lub inaczej $\lambda = \frac{f_1(\hat{\theta}_1, X)}{f_0(\hat{\theta}_0, X)}$

gdzie $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ są estymatorami NW odpowiednio w modelu opisanym przez hipotezę zerową oraz hipotezę alternatywną

Odrzucamy H_0 jeśli $\lambda > c$ dla pewnej stałej c
(wyznaczonej odpowiednio do poz. istotności)



Test ilorazu wiarygodności dla hipotez złożonych – uzasadnienie

Podobnie jak w tw. Neymana-Pearsona, porównujemy „największą szansę otrzymania obserwacji X , gdy prawdziwa jest hipoteza alternatywna” do „największej szansy otrzymania obserwacji X , gdy prawdziwa jest hipoteza zerowa”; odrzucamy hipotezę zerową na rzecz alternatywnej, gdy ten stosunek jest bardzo niekorzystny dla hipotezy zerowej.



Test ilorazu wiarygodności dla hipotez złożonych – wersja alternatywna

Statystyka testowa: $\tilde{\lambda} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} f(\theta, X)}{\sup_{\theta_0 \in \Theta_0} f_0(\theta_0, X)}$

lub inaczej $\tilde{\lambda} = \frac{f(\hat{\theta}, X)}{f_0(\hat{\theta}_0, X)}$

gdzie $\hat{\theta}, \hat{\theta}_0$ są estymatorami NW odpowiednio w modelu bez ograniczeń oraz w modelu opisanym przez hipotezę zerową

Odrzucamy H_0 jeśli $\tilde{\lambda} > \tilde{c}$ dla pewnej stałej $\tilde{c}$.



Test ilorazu wiarygodności dla hipotez złożonych – własności

Dla niektórych modeli z hipotezami złożonymi TJNM *nie istnieje* (więc test ilorazu wiarygodności nie będzie na pewno TJNM bo takiego nie ma)

np. testowanie $H_0: \theta = \theta_0$ przeciw $H_1: \theta \neq \theta_0$, jeżeli rodzina spełnia warunek *monotonicznego ilorazu wiarygodności*, tj. $f_1(x)/f_0(x)$ jest rosnącą funkcją pewnej statystyki $T(x)$ dla każdego f_0 i f_1 odpowiadających parametrom $\theta_0 < \theta_1$.

Żeby mieć TJNM $H_0: \theta = \theta_0$ przeciw $H_1: \theta < \theta_0$ należałoby mieć obszar krytyczny postaci $T(x) > c$, a żeby test był TJNM dla $H_0: \theta = \theta_0$ przeciw $H_1: \theta > \theta_0$ obszar krytyczny musi być postaci $T(x) < c$, a zatem nie da się ustalić TJNM dla hipotezy $H_1: \theta \neq \theta_0$.





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences