

Statystyka Matematyczna

Anna Janicka

wykład VIII, 18.04.2016

ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA

Plan na dzisiaj

Estymacja przedziałowa – przedziały ufności

- podstawy
- Model I (normalny): przedział ufności dla średniej, wariancja znana
- Model II (normalny): przedział ufności dla średniej, wariancja nieznana
- Model II (normalny): przedział ufności dla wariancji
- Model III (asymptotyczny): przedział ufności dla średniej
- Model IV (asymptotyczny): przedział ufności dla odsetka
- ~~Model asymptotyczny: przedział ufności oparty o ENW~~



Przedział ufności – przypomnienie

Niech $g(\theta)$ będzie funkcją nieznanego parametru θ , zaś $\bar{g} = \bar{g}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ oraz $\underline{g} = \underline{g}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będą statystykami

Wówczas $[\underline{g}, \bar{g}]$ to **przedział ufności** dla $g(\theta)$ na poziomie ufności $1-\alpha$, jeśli dla każdego θ

$$P_{\theta}(\underline{g}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq g(\theta) \leq \bar{g}(X_1, X_2, \dots, X_n)) \geq 1 - \alpha$$



Przedział ufności – konstrukcja

- Z definicji, przedział ufności zależy od rozkładu prawdopodobieństwa, z jakim mamy do czynienia
- Najczęściej rozważa się próbki pochodzące z rozkładów normalnych (takie rozkłady występują „w przyrodzie” najczęściej)



Przedział ufności – konstrukcja cd.

- wygodna metoda: szukamy zmiennych losowych zależnych od próby i funkcji parametrów, których *rozkłady* nie zależą od wartości nieznanymi parametrów – tzw. **funkcji centralnych**

- Jeśli $U = U(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta)$ – funkcja centralna, to szukamy przedziału ufności postaci $[a, b]$ t.ż.

$$P_{\theta}(a \leq U \leq b) \geq 1 - \alpha$$

- Najczęściej dodatkowo szukamy przedziałów „symetrycznych”

$$P_{\theta}(U < a) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad P_{\theta}(U > b) \leq \frac{\alpha}{2}$$



Przedział ufności dla średniej – Model I

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym σ^2 jest **znane**

Przedział ufności dla μ , na poziomie $1-\alpha$:

$$\left[\bar{X} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

gdzie $u_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ z rozkładu $N(0,1)$



Przedział ufności – Model I, uzasadnienie:

Punktowy estymator dla μ : $ENW(\mu) = \bar{X}$

Znamy rozkład $\bar{X}$:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n),$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

rozkład nie
zależy od
 μ -- funkcja
centralna

Korzystamy z funkcji centralnej. Chcemy: przedział ufności symetryczny wokół estymatora punktowego (rozkład funkcji centralnej jest symetryczny wokół 0).

Mamy:

$$P_{\mu} \left(\left| \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / \sigma \right| \leq u \right) = \Phi(u) - \Phi(-u) = 2\Phi(u) - 1$$
$$= 1 - \alpha$$

$$\text{skąd } u = u_{1-\alpha/2}$$



Przedział ufności – Model I, własności

- ❑ Błąd oszacowania: $d = u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- ❑ Długość przedziału ufności: $2d$
- ❑ Liczebność próby wystarczająca do uzyskania zadanej *precyzji* (błędu) d :

$$n \geq \frac{\sigma^2 u_{1-\alpha/2}^2}{d^2}$$



Przedział ufności dla średniej – Model II

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, przy czym σ^2 jest **nieznane**

Przedział ufności dla μ , na poziomie $1-\alpha$:

$$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

gdzie $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ z rozkładu t -Studenta z $n-1$ stopniami swobody $t(n-1)$, a $S = \sqrt{S^2}$ dla nieobciążonego estymatora wariancji S^2 .



Przedział ufności – Model II, uzasadnienie:

Punktowy estymator dla μ : $ENW(\mu) = \bar{X}$

Znamy rozkład $\bar{X}$:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n), \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \quad T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Korzystamy z funkcji centralnej T . Chcemy: przedział ufności symetryczny wokół estymatora punktowego (rozkład T jest symetryczny wokół 0). Mamy:

$$P_{\mu, \sigma} \left(\left| \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / S \right| \leq t \right) = 1 - \alpha$$

$$\text{skąd } t = t_{1-\alpha/2}(n-1)$$



Przedział ufności – Model II, własności

- ❑ Błąd oszacowania: $d = t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$
- ❑ Długość przedziału ufności: $2d$
- ❑ Liczebność próby wystarczająca do uzyskania zadanej *precyzji* (błędu) d :
do wyznaczenia na podstawie tzw. dwuetapowej procedury Steina – musimy najpierw wstępnie oszacować wariancję



Dwuetapowa procedura Steina

1. Pobieramy wstępną próbkę $X_1, X_2, \dots, X_{n_0}$ na jej podstawie obliczamy estymator wariancji

$$S_0^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} (X_i - \bar{X}_0)^2$$

2. Sprawdzamy, czy próbka spełnia żądany warunek: obliczamy $k = \frac{S_0^2 [t_{1-\alpha/2}(n_0 - 1)]^2}{d^2}$

a) jeśli $n_0 \geq k$ to za przedział ufności przyjmujemy

$$\left[\bar{X}_0 - t_{1-\alpha/2}(n_0 - 1) \frac{S_0}{\sqrt{n_0}}, \bar{X}_0 + t_{1-\alpha/2}(n_0 - 1) \frac{S_0}{\sqrt{n_0}} \right]$$

b) jeśli $n_0 < k$ to wybieramy $n \geq k$ i dołosowujemy $X_{n_0+1}, X_{n_0+2}, \dots, X_n$, obliczamy średnią z *połączonej* próbki $X_1, X_2, \dots, X_n$, i za przedział ufności przyjmujemy

$$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n_0 - 1) \frac{S_0}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n_0 - 1) \frac{S_0}{\sqrt{n}} \right]$$



Przedział ufności dla wariancji – Model II

Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$.

Przedział ufności dla σ^2 , na poziomie $1-\alpha$:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \right]$$

gdzie $\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ oraz $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ są kwantylami rzędu $\alpha/2$ oraz $1-\alpha/2$,
odpowiednio, z rozkładu chi-kwadrat z $n-1$
stopniami swobody



Przedział ufności – Model II, uzasadnienie

Punktowy estymator dla σ^2 : $ENW(\sigma^2) = S^2$

Znamy rozkład: $U = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$

Korzystamy z funkcji centralnej U . Rozkład chi-kwadrat nie jest symetryczny. Chcemy „symetryczny” przedział ufności, tj.

szukamy takiego przedziału $[a, b]$ że

$$P_{\sigma^2}(U < a) = \frac{\alpha}{2}, \quad P_{\sigma^2}(U > b) = \frac{\alpha}{2}$$

a więc $a = \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ oraz $b = \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$



Przedział ufności dla średniej – Model III

Model asymptotyczny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu mającego średnią (μ) oraz wariancję, n – duże.

Przybliżony przedział ufności dla μ , na poziomie $1-\alpha$:

$$\left[\bar{X} - u_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

gdzie $u_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ z rozkładu $N(0,1)$, a $S = \sqrt{S^2}$ dla nieobciążonego estymatora wariancji S^2 .

Uzasadnienie: z CTG, gdy $n \rightarrow \infty$ mamy $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$



Przedział ufności dla odsetka – Model IV

Model asymptotyczny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu dwupunktowego, n – duże.

$$P_p(X = 1) = p = 1 - P_p(X = 0)$$

Przybliżony przedział ufności dla p , na poziomie $1-\alpha$:

$$\left[\hat{p} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}, \hat{p} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \right]$$

gdzie $u_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ z rozkładu $N(0,1)$



Przedział ufności – Model IV, uzasadnienie

Estymator punktowy odsetka (wskaźnika struktury) p :

$$\hat{p} = ENW(p) = \bar{X}$$

Znamy rozkłady asymptotyczne: z CTG, gdy $n \rightarrow \infty$ mamy

$$U = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Korzystamy z funkcji centralnej U , analogicznie do modelu I.



Przedział ufności – Model IV, własności

- ❑ Błąd oszacowania: $d = u_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}$
- ❑ Liczebność próby wystarczająca do uzyskania zadanej *precyzji* (błędu) d :

$$n \geq \frac{\hat{p}(1-\hat{p})u_{1-\alpha/2}^2}{d^2}$$

jeśli nic nie wiemy o p , należy uwzględnić najbardziej niekorzystny przypadek $p=1/2$:

$$n \geq \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4d^2}$$



Przedział ufności oparty o ENW – Model asymptotyczny

Model asymptotyczny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu o nieznanym parametrze θ , n – duże.

Jeśli $\hat{\theta} = ENW(\theta)$ ma asymptotyczny rozkład normalny z wariancją asymptotyczną $1/I_1(\theta)$, tzn

$$(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0, 1/I_1(\theta))$$

i jeśli dodatkowo $I(\hat{\theta}) = ENW(I(\theta))$ jest zgodny:

$$(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{nI(\hat{\theta})} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Przybliżony przedział ufności dla θ , na poziomie $1-\alpha$:

$$\left[\hat{\theta} - u_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{nI_1(\hat{\theta})}}, \hat{\theta} + u_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{nI_1(\hat{\theta})}} \right]$$

gdzie $u_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ z rozkładu $N(0, 1)$



Przedział ufności oparty o ENW – Model asymptotyczny, przypadek ogólny

Model asymptotyczny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbą IID z rozkładu o nieznanym parametrze θ , n – duże.

Jeśli $g(\hat{\theta}) = g(ENW(\theta))$ ma asymptotyczny rozkład normalny z wariancją asymptotyczną $(g'(\theta))^2 / I_1(\theta)$, tzn

$$(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0, (g'(\theta))^2 / I_1(\theta))$$

i jeśli dodatkowo $I(\hat{\theta}) = ENW(I(\theta))$ jest zgodny:

$$(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{nI(\hat{\theta})} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Przybliżony przedział ufności dla $g(\theta)$, na poz. $1-\alpha$:

$$\left[g(\hat{\theta}) - u_{1-\alpha/2} \frac{|g'(\hat{\theta})|}{\sqrt{nI_1(\hat{\theta})}}, g(\hat{\theta}) + u_{1-\alpha/2} \frac{|g'(\hat{\theta})|}{\sqrt{nI_1(\hat{\theta})}} \right]$$

gdzie $u_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ z rozkładu $N(0, 1)$



Przedział ufności oparty o ENW – przykład

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie próbą IID z rozkładu Poissona z nieznanym parametrem θ , n – duże.

$\hat{\theta} = ENW(\theta) = \bar{X}$ jest asymptotycznie normalny (CTG) z wariancją asymptotyczną $1/I_1(\theta) = \theta$

$\hat{I}(\theta) = 1/\hat{\theta}$ zachowuje się dobrze.

Przybliżony przedział ufn. dla θ , na poziomie $1-\alpha$:

$$\left[\bar{X} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{n}} \right]$$

gdzie $u_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $N(0,1)$

Na przykład, jeśli dla $n=900$ mamy $\bar{X} = 4$, to 90% PPU dla θ byłby

$$\approx \left[4 - 1,645 \sqrt{4/900}; 4 + 1,645 \sqrt{4/900} \right] \approx [3,89; 4,11]$$



Przedział ufności oparty o ENW – przykład cd.

Gdybyśmy chcieli estymować prawdopodobieństwo wyniku = 0, mielibyśmy $g(\theta) = e^{-\theta}$

$$g(\hat{\theta}) = g(ENW(\theta)) = e^{-\bar{X}}$$

I przybliżony PU dla $g(\theta)$, na poziomie $1-\alpha$:

$$\left[e^{-\bar{X}} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{n}} e^{-\bar{X}}, e^{-\bar{X}} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{n}} e^{-\bar{X}} \right]$$

gdzie $u_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu $N(0,1)$

Na przykład, gdyby dla $n=900$ było $\bar{X} = 4$, to 90% PPU dla $g(\theta)$ byłby równy

$$\approx \left[e^{-4} - 1,645 \sqrt{4/900} e^{-4}; e^{-4} + 1,645 \sqrt{4/900} e^{-4} \right] \approx [0,016; 0,020]$$





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences