

Statystyka Matematyczna

Anna Janicka

wykład IV, 14.03.2016

ESTYMACJA PUNKTOWA

Plan na dzisiaj:

1. Zagadnienie estymacji punktowej – cd.
2. Statystyki próbkowe jako estymatory
3. Metody estymacji
 - metoda momentów
 - metoda kwantyli
 - metoda największej wiarygodności



Estymacja punktowa

- Wybór, na podstawie danych, *najlepszego* parametru θ spośród parametrów, jakie mogą opisywać rozkład P_θ
- **Estymator** parametru θ to dowolna statystyka $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ o wartościach w zbiorze Θ (interpretujemy ją jako przybliżenie θ). Zwykle zapisywany jako $\hat{\theta}$
- Czasem estymowane nie θ , a $g(\theta)$.



Estymacja – statystyki próbkowe

Charakterystyki próbkowe:

estymatory tworzone w oparciu o
rozkład empiryczny (dystribuantę
empiryczną)



Momenty i kwantyle z próby jako estymatory

Momenty i kwantyle empiryczne (z próby) są momentami i kwantylami rozkładu empirycznego, a co za tym idzie są estymatorami odpowiednich wartości teoretycznych, np.

- średnia empiryczna = estymator wartości oczekiwanej
 - wariancja empiryczna = estymator wariancji
 - mediana empiryczna = estymator mediany
 - kwantyle empiryczne = estymatory kwantyli
-



Estymacja metodą momentów (EMM)

- ❑ Porównujemy momenty rozkładu teoretycznego (zależą od nieznanego(ych) parametru(ów)) do odpowiednich momentów empirycznych.
- ❑ Uzasadnienie: twierdzenia graniczne
- ❑ Dostajemy układ równań, na podstawie którego wyznaczamy parametr(y).



EMM – cd.

□ Jeśli parametr θ jednowymiarowy, to jedno równanie, zwykle:

$$E_{\theta}X = \bar{X}$$

□ Jeśli parametr θ dwuwymiarowy, to dwa równania, zwykle:

$$\begin{cases} E_{\theta}X = \bar{X}, \\ \text{Var}_{\theta}X = \hat{S}^2 \end{cases}$$

□ Jeśli parametr θ k -wymiarowy, to k równań, zwykle

$$\begin{cases} E_{\theta}X = \bar{X}, \\ \text{Var}_{\theta}X = \hat{S}^2, \\ E_{\theta}(X - E_{\theta}X)^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3, \\ \dots E_{\theta}(X - E_{\theta}X)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \end{cases}$$



EMM – Przykład 1.

□ Model wykładniczy: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbką z rozkładu wykładniczego $\text{Exp}(\lambda)$.

wiadomo: $E_\lambda X = \frac{1}{\lambda}$

równanie: $\frac{1}{\lambda} = \bar{X}$

rozwiązanie:

$$\hat{\lambda} = EMM(\lambda) = \hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\bar{X}}$$



EMM – Przykład 2.

□ Model gamma: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbką z rozkładu gamma $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$.

Wiadomo: $E_{\alpha, \lambda} X = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{Var}_{\alpha, \lambda} X = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

Układ równań:

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \bar{X}, \quad \frac{\alpha}{\lambda^2} = \hat{S}^2$$

rozwiązanie:

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{\bar{X}}{\hat{S}^2}, \quad \hat{\alpha}_{MM} = \frac{\bar{X}^2}{\hat{S}^2}$$



Estymacja metodą kwantyli (EMK)

- Jeśli momenty są trudne do obliczenia albo równania zawile, zamiast momentów można użyć kwantyli. Wybieramy tyle różnych poziomów p , ile mamy nieznanych parametrów i układamy równania

$$q_p(\theta) = \hat{q}_p$$

lub równoważnie

$$F_\theta(\hat{q}_p) = p$$



EMK – Przykład 1.

- Model wykładniczy: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbką z rozkładu wykładniczego $\text{Exp}(\lambda)$.
Dystrybuanta: $F_\lambda = 1 - \exp(-\lambda x)$ dla $\lambda > 0$
Jeden parametr $\rightarrow$ jedno równanie,
zwykle dla mediany

$$1 - \exp(-\lambda \hat{q}_{1/2}) = \frac{1}{2}$$

rozwiązanie:

$$EMK(\lambda) = \hat{\lambda}_{MK} = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\hat{q}_{1/2}} = \frac{\ln 2}{\text{Med}}$$



EMK – Przykład 2.

- Model Weibulla: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbką z rozkładu o dystybuancie

$$F_{b,c} = 1 - \exp(-cx^b)$$

dla $b=1$
rozkład
wykładniczy z
parametrem c

gdzie $b, c > 0$ są nieznanymi parametrami.

dwa parametry $\rightarrow$ dwa równania; zwykle

kwartyle
$$\begin{cases} 1 - \exp(-c\hat{q}_{1/4}^b) = 1/4 \\ 1 - \exp(-c\hat{q}_{3/4}^b) = 3/4 \end{cases}$$

rozwiązanie:

$$EMK(b) = \hat{b}_{MK} = \ln(\ln 4 / (\ln 4 - \ln 3)) / (\ln \hat{q}_{3/4} - \ln \hat{q}_{1/4}),$$

$$EMK(c) = \hat{c}_{MK} = \ln 4 \hat{q}_{3/4}^{-\hat{b}}$$



Własności EMM, EMK

- ☐ Proste koncepcyjnie
- ☐ Nieskomplikowane obliczeniowo
- ☐ Niestety: czasem nie są optymalne (duże błędy, niekoniecznie zachowują się odpowiednio dobrze dla mniejszych prób)
- ☐ Lepsza (zwykle) metoda: największej wiarogodności



Estymacja metodą największej wiarogodności (ENW)

Wybieramy taki parametr θ , dla którego otrzymane wyniki doświadczenia są najbardziej prawdopodobne.

Wiarogodność – opisuje prawdopodobieństwo f (gęstość lub funkcję prawdopodobieństwa) rozważane jako funkcję parametru θ przy ustalonych wartościach obserwacji; $L:\Theta\rightarrow\mathbb{R}$

$$L(\theta) = f(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$$



Estymator Największej Wiarogodności

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ , jeśli

$$\begin{aligned} f(\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \sup_{\theta \in \Theta} f(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

dla dowolnych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

ozn. $\hat{\theta} = ENW(\theta)$

estymator $ENW(g(\theta)) = g(ENW(\theta))$



ENW – kwestie praktyczne

- Zwykle: próbka niezależnych obserwacji.

Wówczas

$$L(\theta) = f_{\theta}(x_1)f_{\theta}(x_2)\dots f_{\theta}(x_n)$$

- Jeśli $L(\theta)$ jest różniczkowalne, a θ jest k -wymiarowe, to szukanie maximum

„standardowo”: $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$

- bardzo często: z uwagi na
multiplikatywność wiarygodności zamiast
 $\max L(\theta)$ znajdowane $\max l(\theta) = \ln(L(\theta))$



ENW – Przykład 1.

□ Kontrola jakości, cd. Maksymalizujemy

$$L(\theta) = P_{\theta}(X = x) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

równoważnie, można maksymalizować

$$l(\theta) = \ln \binom{n}{x} + \ln(\theta^x) + \ln((1 - \theta)^{n-x}) = \ln \binom{n}{x} + x \ln(\theta) + (n - x) \ln(1 - \theta)$$

tzn. rozwiązać równanie $l'(\theta) = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta} = 0$

rozwiązanie: $ENW(\theta) = \hat{\theta}_{NW} = \frac{x}{n}$



ENW – Przykład 2.

□ Model wykładniczy: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbką z rozkładu wykładniczego $\text{Exp}(\lambda)$, λ nieznane.

Mamy: $L(\lambda) = f_{\lambda}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$

maksymalizujemy

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

rozwiązujemy

$$l'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0$$

dostajemy

$$\hat{\lambda}_{NW} = \frac{1}{\bar{X}}$$



ENW – Przykład 3.

□ Model normalny: $X_1, X_2, \dots, X_n$ są próbką z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$. μ, σ nieznane.

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma) &= \ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2\right)\right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} (\sum x_i^2 - 2\mu \sum x_i + n\mu^2) \end{aligned}$$

rozwiązujemy

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} (\sum x_i^2 - 2\mu \sum x_i + n\mu^2) = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n\mu}{\sigma^2} = 0 \end{cases}$$

wynik:

$$\hat{\mu}_{NW} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}_{NW}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{X})^2$$





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences