RP WNE 2019/2020 IV+V seria zadań

Uwaga: zadania z tej serii przeznaczone są dla grup mających zajęcia w piątek, 8 listopada

1. Rzucono dwa razy kostką i przez X oznaczono sumę wyrzuconych liczb oczek. Obliczyć $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$, $\mathbb{P}(X = 7)$, $\mathbb{P}(X > 10,25)$ oraz $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$.

2. Rzucono raz kostką i przez X oznaczono liczbę wyrzuconych oczek. Udowodnić, że zmienne X oraz $7 - X$ mają ten sam rozkład.

3. Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej k, niech X będzie numerem próby, w której nastąpił k-ty sukces. Wyznaczyć rozkład X.

4. W urnie znajduje się 10 kul, ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Losujemy ze zwracaniem 20 kul. Niech X oznacza najmniejszy numer, który został wyciągnięty. Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz rozkład zmiennej X^2.

5. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 2]$. Obliczyć $\mathbb{P}(X \in [1, 3])$ i wyznaczyć funkcję gęstości.

6. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 3.
a) Obliczyć $\mathbb{P}(X \in [3, 4])$.
b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $[X]$ ($[x]$ oznacza część całkowitą liczby x).

7. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = Cx^{-2}1_{[2,\infty)}(x)$.
a) Wyznaczyć C.
b) Wyznaczyć $\mathbb{P}(X \in [1, 12])$.

8. Dystrybuanta F zmiennej losowej X zadana jest następująco:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -2, \\ \frac{1}{3} & \text{jeśli } t \in [-2, 0), \\ \frac{1}{3}t + 1/2 & \text{jeśli } t \in [0, 1), \\ \frac{5}{6} & \text{jeśli } t \in [1, 5), \\ 1 & \text{jeśli } t \geqslant 5. \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{P}(X \in (3, 7))$, $\mathbb{P}(X \in [-2, -1])$, $\mathbb{P}(X \in [-2, -1))$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(|X| \leqslant 1)$. Czy X ma rozkład dyskretny? Czy X ma rozkład ciągły?

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przed tymi ćwiczeniami):

1. Co to jest zmienna losowa? Co to jest rozkład zmiennej losowej?

2. Podać definicję rozkładu geometrycznego.

3. Jakie warunki muszą spełniać parametry a, $b \in \mathbb{R}$, by funkcja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadana wzorem

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 1, \\ a + \frac{b}{t} & \text{jeśli } t \geqslant 1, \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa? Co dodatkowo trzeba założyć, aby taki rozkład był ciągły (tzn. miał gęstość)?

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po tych ćwiczeniach):

4. Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem 2. Obliczyć $\mathbb{P}(X = 3)$ oraz $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$.

5. Rzucono kostką i przez X oznaczono liczbę wyrzuconych oczek. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min(X, 3)$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-5, 8]$. Obliczyć $\mathbb{P}(X = -1)$ oraz $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = Cx^{-3}\, 1_{[1,5]}(x) = \begin{cases} Cx^{-3} & \text{dla } 1 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Obliczyć C oraz $\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \in [\frac{1}{2}, 3]\right)$.