

## RP WNE 2019/2020, XI seria zadań

1. Porównano zatrudnienie w różnych szwalniach w pewnej strefie ekonomicznej. Zaobserwowano, iż liczba krawcowych zatrudnionych w poszczególnych firmach jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[100, 300]$ . Wynagrodzenie krawcowej zależy od firmy, i wynosi średnio 2400 PLN przy odchyleniu standardowym  $400\sqrt{3}$ . Stwierdzono, iż współczynnik korelacji wielkości zatrudnienia i poziomu wynagrodzenia w zbadanych firmach równy jest 0,6. Wyznaczyć najlepsze liniowe przybliżenie zależności między oferowanym wynagrodzeniem a liczbą osób podejmującą zatrudnienie w danej firmie.

2. Rzucono dwa razy kostką i przez  $X, Y$  oznaczono liczby oczek w pierwszym i drugim rzucie. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$ ,  $\mathbb{E}(X + Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|X + Y)$ .

3. Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 10\}$  losujemy bez zwracania dwie liczby, mniejszą oznaczamy przez  $X$ , a większą przez  $Y$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(XY + X|X)$ .

4. Miesięczne zużycie energii elektrycznej w pewnej fabryce ma rozkład jednostajny na przedziale  $[200, 250]$ . Przy zadanym zużyciu  $\lambda$ , ilość wyemitowanego dwutlenku węgla ma rozkład wykładniczy z parametrem  $5 - \lambda/100$ . Wyznaczyć rozkład (gęstość) ilości wyemitowanego dwutlenku węgla w ciągu danego miesiąca.

5. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  oraz  $(0, 1)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$ ,  $\mathbb{E}(XY^2 + 3X^2Y - 1|X)$  oraz  $\mathbb{P}(Y \leq \frac{1}{2}|X)$ .

6. Rzucamy raz kostką, a następnie rzucamy nią tyle razy, ile oczek wypadło za pierwszym razem. Niech  $X$  oznacza sumę wszystkich liczb oczek (łącznie z pierwszym rzutem). Obliczyć  $\mathbb{E}X$ .

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria, jaką trzeba znać przychodząc na ćwiczenia:

1. Podać wzory na współczynniki  $a$  i  $b$  najlepszego liniowego przybliżenia zmiennej losowej  $Y$  zmienną losową  $X$ .

2. Podać definicję warunkowej wartości oczekiwanej dla zmiennej dyskretnej.

3. Podać definicję gęstości warunkowej i warunkowej wartości oczekiwanej dla zmiennej ciągłej.

Zadania, jakie trzeba umieć rozwiązać po tych ćwiczeniach:

4. Nadajnik wysyła sygnał  $X$ . Odbiornik odbiera sygnał  $Y = aX + Z$ , gdzie  $a > 0$  jest współczynnikiem wzmocnienia, zaś  $Z$  jest zakłóceniem. Wiadomo, że  $X, Z$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym  $\mathbb{E}X = m$ ,  $\text{Var } X = 1$ ,  $\mathbb{E}Z = 0$  oraz  $\text{Var } Z = \sigma^2$ . Wyznaczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych  $X, Y$  oraz regresję liniową  $X$  względem  $Y$ .

5. Wiadomo, że  $\mathbb{P}(Y = 1|X = 5) = 1/3$  oraz  $\mathbb{P}(Y = 5|X = 5) = 2/3$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X = 5)$  oraz  $\mathbb{E}(XY^2|X = 5)$ .

6. W urnie znajdują się dwie białe kule, z numerami 1 i 2, oraz trzy czarne kule, z numerami 1, 2 oraz 3. Z urny wyciągnięto bez zwracania dwie kule. Niech  $X$  oznacza największy z wylosowanych numerów, a  $Y$  oznacza liczbę wylosowanych białych kul. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

7. Rzucono trzy razy monetą. Niech  $X$  oznacza łączną liczbę wyrzuconych orłów oraz

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadł orzeł,} \\ 0 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadła reszka.} \end{cases}$$

Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(XY|X)$ .

8. Pracownik wykonuje dwie rozmowy telefoniczne: czas trwania pierwszej rozmowy, oznaczony przez  $X$ , ma rozkład jednostajny na przedziale  $[10, 20]$ ; czas trwania drugiej rozmowy ma rozkład jednostajny na przedziale  $[5, X]$ . Wyznaczyć wartość oczekiwaną łącznego czasu trwania rozmów.

**9.** Liczba monet w urnie jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 2. Losujemy kolejno monety z urny i każdą z nich wykonujemy rzut. Niech  $X$  oznacza liczbę wyrzuconych orłów. Obliczyć  $\mathbb{E}X$ .

**10.** Rzucono raz kostką i raz monetą. Niech  $X$  oznacza liczbę wyrzuconych oczek, pomnożoną przez 2 jeśli na monecie wypadł orzeł. Obliczyć  $\mathbb{E}X$ .

**11.** Na odcinku  $[0, 1]$  wybieramy losowo liczbę  $X$  (zgodnie z rozkładem jednostajnym), a następnie z odcinka  $[0, X]$  wybieramy losowo liczbę  $Y$  (także zgodnie z rozkładem jednostajnym). Obliczyć  $\mathbb{E}Y$ .

**12.** Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$  oraz  $(-1, 0)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(X^2 + XY|Y)$ .

**13.** Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = (x + y)1_{\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}}.$$

Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(\sin X + Y|Y)$ .