

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład XII, 7.1.2020

**NIERÓWNOŚCI CZEBYSZEWA
RÓŻNE RODZAJE ZBIEŻNOŚCI
PRAWA WIELKICH LICZB**

Plan na dzisiaj

20. Warunkowa wartość oczekiwana

- jako prognoza

21. Nierówność Czebyszewa i pochodne

22. Różne rodzaje zbieżności

- zbieżność prawie na pewno
- zbieżność wg. prawdopodobieństwa

23. Prawa Wielkich Liczb

- Słabe PWL
 - Mocne PWL
-



20. WWO – predykcja

WWO jako najlepsze (średniokwadratowo) przybliżenie borelowskie

*Niech $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą zmiennymi losowymi,
 $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, wówczas funkcja $\varphi^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
dana wzorem $\varphi^*(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$ spełnia
 $\mathbb{E}(Y - \varphi^*(X))^2 = \min\{\mathbb{E}(Y - \varphi(X))^2 : \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \text{borelowska}\}.$*



21. Nierówność Czebyszewa

1. Czasem interesuje nas tylko odpowiednia precyzja pomiaru; nierówności postaci:

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \alpha.$$

2. Nierówność Czebyszewa

Dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej X oraz dla każdego $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}X}{\varepsilon}.$$



21. Nierówność Czebyszewa – nier. pochodne

3. Nierówności Czebyszewa dla $f(X)$:

$$|X|^p, (X - \mathbb{E}X)^2, e^{\lambda X}$$

Niech X będzie zmienną losową.

- a) **Nierówność Markowa.** *Dla dowolnej liczby $p > 0$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\varepsilon^p}$.*
- b) **Nierówność Czebyszewa-Bienaymé.** *Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$.*
- c) **Wykładnicza nierówność Czebyszewa.** *Założmy, że $\mathbb{E}e^{pX} < \infty$ dla pewnego $p > 0$. Wówczas dla dowolnego $\lambda \in [0, p]$ oraz dowolnego ε , $\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}e^{\lambda X}}{e^{\lambda \varepsilon}}$.*



21. Nierówność Czebyszewa i pochodne – przykłady

4. Przykłady

- wielokrotny pomiar jednej wielkości z zadaną precyzją
- ustalenie nieznanego odsetka p
- szacowanie skomplikowanych prawdopodobieństw przy znanych rozkładach

22. Nierówność Czebyszewa – nier. pochodne cd

5. Nierówność Bernsteina

Niech S_n będzie liczbą sukcesów w n -próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu równym p . Wówczas, dla każdego $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-2\varepsilon^2 n} \text{ oraz } \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \leq e^{-2\varepsilon^2 n}.$$

a w sumie:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-2\varepsilon^2 n}.$$

6. Przykłady:

■ porównanie z nier. Czebyszewa



Porównanie nierówności

ε	n	Czebyszewa -Bienaymé	Bernsteina
0,1	100	0,25	0,2707
0,1	1000	0,025	4,1223E-09
0,05	100	1	1,2131
0,05	1000	0,1	0,0135
0,05	10000	0,01	3,8575E-22
0,01	100	25	1,9604
0,01	1000	2,5	1,6375
0,01	10000	0,25	0,2707
0,01	100000	0,025	4,1223E-09



22. Rodzaje zbieżności

0. Kiedy mogą pojawić się ciągi i granice zmiennych losowych?

1. Zbieżność prawie na pewno

Mówimy, że ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ jest zbieżny prawie na pewno do X , jeśli $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$.

Równoważnie, istnieje zdarzenie $\Omega' \subset \Omega$ pełnej miary (tzn. takie, że $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ o tej własności, że dla każdego $\omega \in \Omega'$, $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$). Oznaczenie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ p.n.} \quad \text{lub} \quad X_n \xrightarrow{\text{p.n.}} X.$$

alternatywnie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \varepsilon) = 0$$



22. Rodzaje zbieżności – cd.

2. Zbieżność wg. p-stwa

*Mówimy, że ciąg (X_n) jest zbieżny według prawdopodobieństwa do X , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.*

*Równoważnie, dla każdego $\varepsilon > 0$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$.*

Oznaczenie: $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

3. Zbieżność prawie na pewno $\Rightarrow$ zbieżność wg p-stwa (zbieżność p.n. jest silniejsza)



22. Rodzaje zbieżności – cd. (2)

4. Własności zbieżności

Założmy, że $(X_n)_{n \geq 1}$, $(Y_n)_{n \geq 1}$ są ciągami zmiennych losowych. Jeśli $(X_n)_{n \geq 1}$ zbiega do X i $(Y_n)_{n \geq 1}$ zbiega do Y prawie na pewno (odp. według prawdopodobieństwa), to $X_n \pm Y_n \rightarrow X \pm Y$ i $X_n \cdot Y_n \rightarrow XY$ prawie na pewno (odp., według prawdopodobieństwa).

5. Przykłady



Słabe prawa wielkich liczb (SPWL)

Zbieżność **według prawdopodobieństwa** dla sum (średnich) dużej liczby zmiennych losowych

1. Słabe PWL dla schematu Bernoulliego

Założmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$, $n = 1, 2, \dots$. Wówczas (S_n/n) zbiega według prawdopodobieństwa do p (tzn. zmiennej losowej stałej, równej p); innymi słowy, dla każdego $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right) = 0$.



Słabe prawa wielkich liczb – cd.

2. Słabe PWL dla zmiennych nieskorelowanych

Założmy, że $X_1, X_2, \dots$ jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych o wspólnie ograniczonej wariancji.

Wówczas $(X_n)_{n \geq 1}$ spełnia słabe prawo wielkich liczb:

$$(S_n - \mathbb{E}S_n)/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \text{ tzn. dla dowolnego } \varepsilon > 0 \text{ mamy}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

- zmienne nie muszą być takie same!
- jeśli są takie same (o średniej m), to teza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \varepsilon \right) = 0$$

Słabe prawa wielkich liczb – cd. (2)

3. Przykłady

- zdarzenia niezależne
- nieograniczone wariancje → źle
- zmienne skorelowane → źle
- kłopotliwe pytanie



Mocne prawa wielkich liczb (MPWL)

Zbieżność prawie na pewno

4. Mocne PWL dla schematu Bernoulliego

Założmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$, $n = 1, 2, \dots$

Wówczas (S_n/n) zbiega prawie na pewno do p (tzn. zmiennej losowej stałej, równej p); innymi słowy, istnieje zdarzenie Ω' pełnej miary takie, że jeśli $\omega \in \Omega'$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = p.$$


Mocne prawa wielkich liczb – cd.

5. Mocne PWL Kołmogorowa

Założmy, że $X_1, X_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych całkownalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Wówczas $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}X_1$.

- wada: nie znamy tempa zbieżności...
- zastosowania: mnóstwo, w szczególności weryfikacja modelu probabilistycznego (np. paradoks kawalera de Méré), metody Monte Carlo obliczania całek, ...



Zastosowania MPWL

6. Średnia i wariancja z próby są dobre:
jeśli ciąg zmiennych spełnia założenia
MPWL (tzn. IID), to:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.n.} \mathbb{E}X_1$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X})^2 \xrightarrow{p.n.} \text{Var}X_1$$



Zastosowania MPWL – cd.

7. Jeśli rozważymy dystrybuanty empiryczne związane z próbką liczebności N

$$F_N(t) = \frac{1_{\{X_1 \leq t\}} + 1_{\{X_2 \leq t\}} + \dots + 1_{\{X_N \leq t\}}}{N}$$

to zachodzi **Tw. Gliwenki-Cantelliego**:

Założmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają ten sam rozkład o dystrybuancie F . Wówczas

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_N(t) - F(t)| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.n.} 0.$$



