

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład XI, 17.12.2019

REGRESJA LINIOWA

WARUNKOWA WARTOŚĆ OCZEKIWANA

Plan na dzisiaj

18. Regresja liniowa

20. Warunkowa wartość oczekiwana



18. Regresja liniowa

Szukamy liniowego przybliżenia zmiennej Y zmienną X , postaci $aX + b$. Przybliżenie ma być najlepsze możliwe w sensie błędu średniokwadratowego, tj. minimalizujące

$$f(a, b) = \mathbb{E}(Y - aX - b)^2$$

Wówczas, o ile odp. wyrażenia istnieją i mają sens:

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}X} \quad b = \mathbb{E}Y - \mathbb{E}X \cdot \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}X}$$



$$a = \rho_{X,Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

20. Warunkowa wartość oczekiwana

0. Motywacja

Wektory dyskretne:

1. Definicja WWO Y pod warunkiem $X=x$

*Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, spełniającą $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$, takiej że $\mathbb{P}(X = x) > 0$, definiujemy **warunkową wartość oczekiwaną Y pod warunkiem $X = x$** (ozn. $\mathbb{E}(Y|X = x)$) jako wartość oczekiwaną rzeczywistej zmiennej losowej o rozkładzie μ : $\mu(A) = \mathbb{P}(Y \in A|X = x)$.*

Zatem, jeśli S jest zbiorem tych $y \in \mathbb{R}$, że $\mathbb{P}(Y = y|X = x) > 0$ (równoważnie, $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) > 0$), mamy

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \sum_{y \in S} y \mathbb{P}(Y = y|X = x).$$


20. WWO – dyskretne zm. los cd.

2. Przykłady

- prosty przykład
- $Y = f(X)$

3. Tw – WWO funkcji

Jeśli (X, Y) jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, zaś $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funkcją borelowską, taką że $\mathbb{E}|\varphi(Y)| < \infty$, to dla dowolnego x , takiego że $\mathbb{P}(X = x) > 0$, zachodzi równość

$$\mathbb{E}(\varphi(Y)|X = x) = \sum_{y \in S} \varphi(y) \mathbb{P}(Y = y|X = x),$$

gdzie $S = \{y \in \mathbb{R}: \mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) > 0\}$.



20. WWO – ciągłe zm. los.

4. Definicja gęstości warunkowej

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o gęstości $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$. Niech $g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dy > 0$ będzie gęstością zmiennej X . Dla $x \in \mathbb{R}$, definiujemy **gęstość warunkową** zmiennej Y pod warunkiem $X = x$ jako funkcję daną wzorem

$$g_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{g(x, y)}{g_X(x)} & \text{jeśli } g_X(x) > 0 \\ f(y) & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ jest dowolną ustaloną gęstością.

5. Własności gęstości warunkowej

- ciągły odpowiednik p-stwa warunkowego
- jest to gęstość pewnego rozkładu
- nie jest jednoznaczna, ale to bez znaczenia
- ok dla zmiennych niezależnych



20. WWO – ciągłe zm. los (cd.)

6. Przykłady

- rozkład jednostajny
- wyliczenie gęstości łącznej z gęstości warunkowej (t. drugiej gęstości brzegowej)

7. Definicja WWO Y pod warunkiem $X=x$

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o gęstości $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, takim że $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy warunkową wartość oczekiwaną zmiennej Y pod warunkiem $X = x$ (ozn. $\mathbb{E}(Y|X = x)$) jako wartość oczekiwaną rzeczywistej zmiennej losowej o gęstości $f_x(y) = g_{Y|X}(y|X = x)$. Zatem

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yg_{Y|X}(y|x)dy.$$


20. WWO – ciągłe zm. los. cd. (2)

8. Przykład

9. Tw – WWO funkcji

Jeśli (X, Y) jest dwuwymiarową zmienną losową posiadającą gęstość $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, zaś $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską taką że $\mathbb{E}|\varphi(Y)| < \infty$, to dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\varphi(Y)|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)g_{Y|X}(y|x)dy$.



20. WWO – zmienna losowa

10. Definicja właściwej WWO

Niech X, Y będą zmiennymi losowymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Załóżmy, że $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej Y pod warunkiem X (ozn. $\mathbb{E}(Y|X)$) nazywamy zmienną losową, daną wzorem $\mathbb{E}(Y|X) = m(X)$, gdzie $m(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$.

11. Definicja p-stwa pod warunkiem X

Niech X będzie zmienną losową. Dla dowolnego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$, definiujemy $\mathbb{P}(A|X) = \mathbb{E}(1_A|X)$.

12. Przykłady



20. WWO – zmienna losowa (cd)

13. Własności WWO – jak każda zm.los.

Niech $X, Y, Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą zmiennymi losowymi, przy czym $\mathbb{E}|X|, \mathbb{E}|Y| < \infty$. Wówczas

- (i) *Jeśli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}(X|Z) \geq 0$.*
- (ii) *$|\mathbb{E}(X|Z)| \leq \mathbb{E}(|X||Z)$.*
- (iii) *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ mamy*
$$\mathbb{E}(aX + bY|Z) = a\mathbb{E}(X|Z) + b\mathbb{E}(Y|Z).$$



20. WWO – zmienna losowa cd. (2)

14. Własności WWO – specyficzne

*Niech $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą zmiennymi losowymi.
Jeśli Y jest całkowalna, to*

- (i) $\mathbb{E}|\mathbb{E}(Y|X)| < \infty$ oraz $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}Y$.
- (ii) *Jeśli X, Y są niezależne, to $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}Y$.*
- (iii) *Jeśli $h(X)$ jest ograniczoną zmienną losową,
to $\mathbb{E}(h(X)Y|X) = h(X)\mathbb{E}(Y|X)$.*



20. WWO – predykcja

15. WWO jako najlepsze (średniokwadratowo) przybliżenie borelowskie

*Niech $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą zmiennymi losowymi,
 $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, wówczas funkcja $\varphi^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
dana wzorem $\varphi^*(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$ spełnia
 $\mathbb{E}(Y - \varphi^*(X))^2 = \min\{\mathbb{E}(Y - \varphi(X))^2: \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \text{borelowska}\}.$*



