

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład VI, 12.11.2019

JEDNOWYMIAROWE ZMIENNE LOSOWE – CD.

WARTOŚĆ OCZEKIWANA

Plan na dzisiaj

13. Dystrybuanta zmiennej losowej:
kwantyle

14. Charakterystyki zmiennej losowej:
wartość oczekiwana

- zmiennej dyskretnej
- zmiennej ciągłej
- funkcji zmiennej losowej
- własności



13. Dystrybuanta zmiennej losowej

Definicja kwantyla

Niech X będzie zmienną losową, zaś $p \in [0, 1]$.

Kwantylem rzędu p zmiennej X nazywamy dowolną liczbę x_p , taką że

$$\mathbb{P}(X \leq x_p) = F_X(x_p) \geq p \text{ oraz } \mathbb{P}(X \geq x_p) \geq 1 - p.$$

Kwantyl rzędu $1/2$ nazywamy także medianą.

Przykłady

- kwantyle dla zmiennej dwupunktowej
- kwantyle rozkładu normalnego standardowego



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu

1. Motywacja

2. Wartość oczekiwana zmiennej dyskretnej

*Założmy, że X jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, skoncentrowanym na zbiorze $S \subset \mathbb{R}$ i niech $p_x = \mathbb{P}(X = x)$ dla $x \in S$. Mówimy, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X jest skończona (bądź że zmienna losowa X jest **całkowalna**), jeśli $\sum_{x \in S} |x|p_x < \infty$.*

*Wówczas określamy **wartość oczekiwana** zmiennej X jako $\mathbb{E}X = \sum_{x \in S} xp_x$.*

inaczej wartość średnia, zależy tylko od rozkładu!



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd.

3. Przykłady liczenia wartości oczekiwanej

- zmienna jednopunktowa
- rzut kostką
- rozkład Bernoulliego (n, p)
- niecałkowalna zmienna dyskretna x^2
 - szereg nie jest zbieżny
 - szereg nie jest absolutnie zbieżny



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd. (2)

4. Wartość oczekiwana zmiennej ciągłej

Założmy, że zmienna losowa X ma rozkład z gęstością g .

Jeśli $\int_{\mathbb{R}} |x|g(x)dx < \infty$, to mówimy, że wartość oczekiwana X istnieje (bądź że zmienna losowa X jest całkowalna).

Definiujemy wówczas wartość oczekiwaną X jako

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} xg(x)dx.$$

5. Ograniczona zmienna losowa ma wartość oczekiwaną

6. Przykłady liczenia wartości oczekiwanych

- rozkład jednostajny

- rozkład normalny standardowy

- rozkład Cauchy'ego – nie ma EX



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd. (3)

7. Twierdzenie 15 (własności wartości oczekiwanej)

Założmy, że X i Y są całkowalnymi zmiennymi losowymi.

(i) Jeśli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}X \geq 0$.

(ii) Jeśli $X \leq Y$, to $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

(iii) Mamy $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}|X|$.

(iv) Wartość oczekiwana jest operatorem liniowym: jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to zmienna $aX + bY$ jest zmienną całkowalną i $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$.

(v) Jeśli $X = 1_A$, to $\mathbb{E}X = \mathbb{P}(A)$.

8. Przykłady zastosowań tw. 15

■ rozbiecie jednej zmiennej na sumę zmiennych



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd. (4)

9. Twierdzenie 16 (wartość oczekiwana $\phi(X)$)

Założmy, że $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest pewną funkcją borelowską.

(i) Założmy, że X ma rozkład dyskretny na zbiorze S i $p_x = \mathbb{P}(X = x)$ dla $x \in S$. Wówczas zmienna losowa $\phi(X)$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$\sum_{x \in S} |\phi(x)| p_x < \infty$; wartość oczekiwana $\phi(X)$ wynosi wtedy $\mathbb{E}\phi(X) = \sum_{x \in S} \phi(x) p_x$.

(ii) Założmy, że X ma rozkład ciągły z gęstością g .

Wówczas zmienna losowa $\phi(X)$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| g(x) dx < \infty$; wartość oczekiwana wynosi wówczas $\mathbb{E}\phi(X) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) g(x) dx$.



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd. (5)

10. Przykłady zastosowań tw. 16

- rzut kostką
- zmienna ciągła
- zmienna nieciągła niedyskretna

11. Wartość oczekiwana dyskretnej zmiennej nieujemnej o wartościach całkowitych

12. *Jeśli X jest całkowalną, dyskretną zmienną losową skoncentrowaną na liczbach całkowitych nieujemnych, to*

$$\text{—} \quad \mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$



Wartość oczekiwana zmiennej losowej o wartościach będących liczbami naturalnymi

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k).$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(X = 1) + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 2) + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 3) + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 4) + \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

i ostatecznie:

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd. (6)

13. Twierdzenie 18

Niech X będzie zmienną losową nieujemną.

(i) Jeśli $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt < \infty$,

*to X jest całkowalna i powyższa całka
to wartość oczekiwana X .*

(ii) Jeśli $p \in (0, \infty)$ i $p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt < \infty$,

*to X^p jest całkowalna i powyższa całka
to wartość oczekiwana X^p .*

14. Przykłady zastosowań tw. 18

- uproszczenie obliczeń (rozkład wykładniczy, geometryczny)



- liczenie wartości oczekiwanych „dziwnych” zmiennych

14.1 Wartość oczekiwana – podsumowanie

1. Wartość średnia
2. Dla zmiennych dyskretnych średnia ważona
3. Dla zmiennych ciągłych średnia ważona gęstością
4. Wartość oczekiwana jako operator liniowy
5. Wartość oczekiwana zmiennej nieujemnej
6. Wartość oczekiwana $\phi(X)$





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences