

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład IV, 29.10.2019

ZMIENNE LOSOWE – WSTĘP

Plan na dzisiaj

11. Twierdzenie Poissona – dokończenie

12. Jednowymiarowe zmienne losowe

- Definicja zmiennej losowej
- Przykłady zmiennych losowych
- Definicja rozkładu zmiennej losowej
- Opis rozkładu dla zmiennej dyskretnej
- Opis rozkładu dla zmiennej losowej ciągłej:
gęstość rozkładu

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – wstęp



11. Twierdzenie Poissona – cd.

*Jeśli $p_n \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$,
to dla $k = 0, 1, 2, \dots$,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$*

Oszacowanie błędu w Tw. Poissona

*Niech S_n oznacza liczbę sukcesów
w schemacie Bernoulliego składającym się
z n prób i prawdopodobieństwie sukcesu p .
Oznaczmy $\lambda = np$.*

Dla dowolnego $A \subset \{0, 1, 2, \dots\}$,
$$\left| \mathbb{P}(S_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$



WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences

Przykłady zastosowań tw. Poissona

12. Jednowymiarowe zmienne losowe

1. Motywacja: funkcje od wyniku losowania

2. Definicja **zmiennej losowej**

*Funkcję $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}$** , jeśli dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $X^{-1}((-\infty, a])$ jest zdarzeniem, czyli $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.*

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$$

3. Przykłady zmiennych losowych

- liczba wyrzuconych orłów, reszek
- suma wyrzuconych oczek
- odległość punktu od liczby całkowitej



12. Jednowymiarowe zmienne losowe – cd. (1)

4. Działania na/funkcje zmiennych losowych

5. Przykłady opisu zmiennych losowych

- orły, reszki
- odległość punktu z koła od środka

6. Definicja **Rozkładu zmiennej losowej**

Rozkładem zmiennej losowej *rzeczywistej* X nazywamy *prawdopodobieństwo* μ_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dane wzorem $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Różne zmienne mogą mieć ten sam rozkład

Ozn. $X \sim \mu$

Zapominamy o Ω ...



12. Jednowymiarowe zmienne losowe – cd. (2)

7. Przykłady rozkładów zmiennych losowych

- rzut kostką
- **rozkład dyskretny**
- Schemat Bernoulliego
- rozkład geometryczny
- rozkład Poissona
- rozkład ciągły: rozkład jednostajny na odcinku
- inny przykład rozkładu ciągłego



12. Jednowymiarowe zmienne losowe – cd. (3)

8. Definicja ciągłej zmiennej losowej i gęstości zmiennej losowej

Zmienna losowa X ma rozkład ciągły, jeśli istnieje taka funkcja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, że dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A g(x)dx.$$

Wówczas funkcję g nazywamy gęstością (rozkładu) zmiennej X .



12. Jednowymiarowe zmienne losowe – cd. (4)

9. Własności gęstości

- nieujemna
- unormowana
- jednoznacznie wyznacza rozkład

10. Przykłady rozkładów cd.

- rozkład jednostajny raz jeszcze
- rozkład wykładniczy
- **standardowy rozkład normalny**
- ogólny rozkład normalny
- delta Diraca



13. Dystrybuanta zmiennej losowej

1. Definicja **dystybuanty** zmiennej losowej

Dystrybuantą zmiennej losowej $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ daną wzorem $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

zależy tylko od rozkładu

2. Przykłady dystrybuant dla zmiennych

- jednopunktowej
 - dwupunktowej
 - rozkładu wykładniczego
-





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences