

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład I, 8.10.2019

PODSTAWY RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA

Kwestie techniczne

- Kontakt: ajanicka@wne.uw.edu.pl
- Dyżur: wtorki, godz. 9:45 s. A006
- strona z materiałami z przedmiotu:
www.wne.uw.edu.pl/azylicz,
www.mimuw.edu.pl/~ados
- Podręczniki:
 - skrypt Osękowski & Adamczak,
 - Jakubowski & Sztencel x 2



Reguły zaliczenia

1. Dowolny z wykładów (13:15, 16:45). Obecność ZALECANA.
2. Ćwiczenia OBOWIĄZKOWE (max. 3 nieobecności)
3. Zaliczenie ćwiczeń: co najmniej 6 z 7 kartkówek z bieżącego materiału (WYKŁAD też!). Jeden termin poprawy.
4. Ocena z ćwiczeń: kartkówki + ew. aktywność
5. PRACE DOMOWE. Jedna poprawa
6. KOŁOKWIUM wspólne dla wszystkich **3.12.2019r godz. 18:45 Aud Max**
7. Egzamin w I terminie: (40) pkt kol + (50) pkt egz + (10) pkt prace domowe, **dla ≥ 3 ćw**
8. ~~Egzamin w II terminie: max {pkt kol + pkt egz II + pkt pd,~~

~~9/5 pkt egz II + pkt pd}~~



Czego można się spodziewać

- ☐ Skrypt do wykładu na stronie
- ☐ Prezentacje na stronie
- ☐ Zadania na ćwiczenia na stronie (te same dla wszystkich grup ćw.)
- ☐ Zadania domowe na stronie
- ☐ Znajomość materiału z ostatnich ćwiczeń oraz wykładu obowiązkowa na ćwiczenia (kartkówki). Zalecane przejrzanie serii zadań (aktywność)



Wyniki egzaminu z RP w I terminie 2017/2018 a liczba punktów z prac domowych

PD	Średnia pkt z egzaminu
----	------------------------

0	16.16667
1	8.25
2	13.625
3	14.5
4	15.1
5	15.25
6	16.90909
7	20.21552
8	20.4
9	21.70089
10	24.77218

....

Czy to co widać to przypadek?

Czy jest jakaś zależność między liczbą zrobionych prac domowych a średnią punktów z egzaminu?

Inne przykładowe pytania:

Jakie jest prawdopodobieństwo, że egzamin będzie zaliczony przez studenta, jeśli liczba punktów z prac domowych =10? a 0?

Jaka jest szansa, że wszyscy zaliczą?

Od czego zależy rozkład ocen?



Tematyka zajęć – plan semestru

- ☐ Na początek trochę podstaw & „klasyki”
- ☐ „Nowoczesne” prawdopodobieństwo
- ☐ Opisywanie rzeczywistości – zmienne losowe. Kluczowe w statystyce i ekonometrii
- ☐ Twierdzenia graniczne – kluczowe j.w., wykorzystywane „masowo” w praktyce np. towarzystwa ubezpieczeniowe



Plan na dzisiaj

1. Rys historyczny
2. Zdarzenia, przykłady prostych modeli
3. σ -ciała
4. Prawdopodobieństwo intuicyjnie – częstość zdarzeń
- 5. Aksjomatyka Kołmogorowa**
6. Przykłady
7. Podstawowe własności prawdopodobieństwa



1. Rys historyczny

☐ Motywacje:

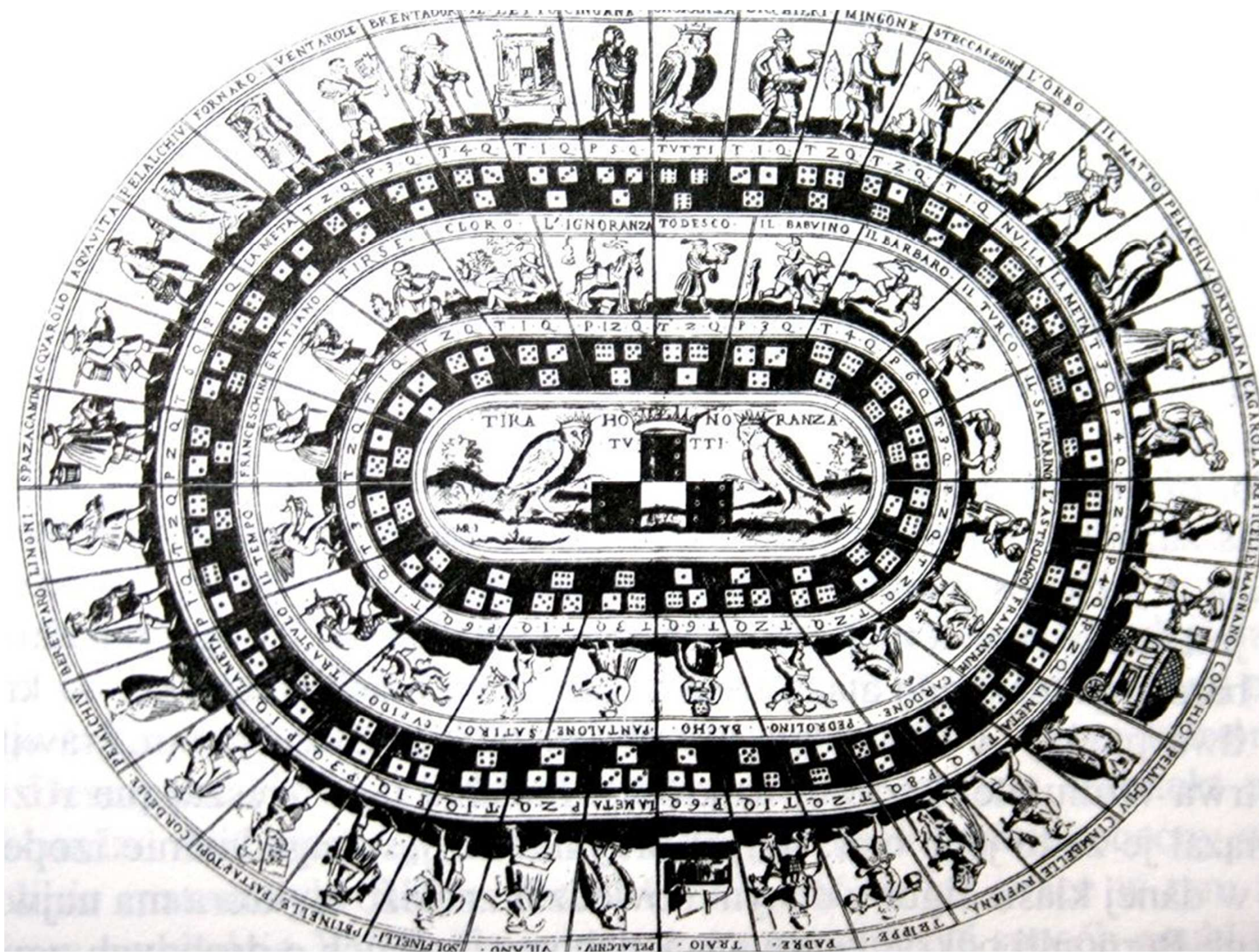
- gry hazardowe
- statystyki urodzeń i zgonów
- ubezpieczenia transportu

☐ „Paradoksy”

☐ Pierwsze prace matematyczne bez błędów: Bernoulli, 1752

☐ „Nowoczesne” prawdopodobieństwo: aksjomatyka Kołmogorowa, 1933





1. Rys historyczny

☐ Motywacje:

- gry hazardowe
- statystyki urodzeń i zgonów
- ubezpieczenia transportu

☐ „Paradoksy”

☐ Pierwsze prace matematyczne bez błędów: Bernoulli, 1752

☐ „Nowoczesne” prawdopodobieństwo: aksjomatyka Kołmogorowa, 1933



Gerolamo Cardano, De Ludo Aleae (Księga gier), 1564

"Jeśli ktoś potrzebuje rzucić co najmniej dwa razy, to wiadomo, że rzutów sprzyjających jest 91, a pozostałych 125; podnosząc te liczby do kwadratu dostajemy 8281 i 15625, więc szanse są jak 2 do 1"

"To rozumowanie wydaje się być niepoprawne... na przykład, szansa uzyskania jednej z wybranych trzech ścian w jednym rzucie jedną kostką jest równa szansie uzyskania jednej z pozostałych trzech, ale zgodnie z tym rozumowaniem mielibyśmy równe szanse uzyskania wybranej ścianki za każdym razem w dwóch rzutach, a zatem i w trzech, i czterech, co jest absurdalne."



1. Rys historyczny

☐ Motywacje:

- gry hazardowe
- statystyki urodzeń i zgonów
- ubezpieczenia transportu

☐ „Paradoksy”

☐ Pierwsze prace matematyczne bez błędów: Bernoulli, 1752

☐ „Nowoczesne” prawdopodobieństwo: aksjomatyka Kołmogorowa, 1933



2. Zdarzenia, przykłady prostych modeli

ZDARZENIE ELEMENTARNE: ω

ZBIÓR ZDARZEŃ ELEMENTARNYCH: Ω

1. Rzut monetą
2. Rzut kostką
3. Rzut dwiema kostkami. Suma pkt.
4. Losowanie 13 kart z talii 52 – z kolejnością i bez
5. Rzut monetą do czasu otrzymania orła
6. Rzut igły na stół



2. Zdarzenia cd.

- ZDARZENIE: $A, B, itd.$
- $\omega \in A$ (zaszło A) bądź $\omega \notin A$ (nie zaszło A)
- Szczególne zdarzenia, działania:
 $\Omega, \emptyset, A', A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \subseteq B$



3. σ -ciała

- Opisują, które zbiory są mierzalne (którym zdarzeniom możemy przypisać prawdopodobieństwo). W prostych przypadkach: **nie musimy sobie tym zawracać głowy.**
- Formalnie: definicja σ -ciała $\mathcal{F}$

Rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω nazywamy σ -ciałem, jeśli

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$,
- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.



4. Prawdopodobieństwo intuicyjnie – częstość zdarzeń

$$\rho_n(A) = \frac{\text{liczba zajść } A}{n}$$

- ☐ Liczenie częstości
- ☐ Własności częstości
- ☐ Granica = ?



5. Aksjomatyka Kołmogorowa

Dla ustalonego $(\Omega, \mathcal{F})$ definiujemy prawdopodobieństwo jako funkcję $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ spełniającą 3 warunki

- (i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$,
- (ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- (iii) jeśli $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ są parami rozłączne, to

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

□ PRZESTRZEŃ PROBABILISTYCZNA
 $= (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$



6. Przykłady

1. Rzut symetryczną monetą
2. Rzut niesymetryczną monetą
3. Rzut kostką
- 4. Schemat klasyczny**
5. Losowanie 5 kart z talii 52, pytanie o 4 asy
6. P-stwo geometryczne



7. Podstawowe własności prawdopodobieństwa

□ Twierdzenie 1 (arytmetyka)

Niech $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Wówczas

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(ii) Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

(iii) $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(iv) Jeśli $A \subseteq B$, to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

(v) Jeśli $A \subseteq B$, to $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(vi) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vii) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.



7. Podstawowe własności prawdopodobieństwa – cd.

□ Twierdzenie 2 (wzór włączeń-wyłączeń)

Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, to

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots \\ & + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).\end{aligned}$$



7. P-stwo na zbiorze przeliczalnym

Funkcja charakterystyczna, indykator zbioru A :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in A, \\ 0 & \text{jeśli } x \notin A. \end{cases}$$





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences