

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 grudnia 2018r., grupa A

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych siedmiu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. **Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D.** Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Grupę 6 kobiet i 6 mężczyzn podzielono losowo na dwie grupy, składające się z 8 oraz 4 osób.
 - a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że w obu grupach będą co najmniej dwie kobiety.
 - b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że w grupie 8-osobowej jest co najmniej pięciu mężczyzn, jeśli wiadomo, że w grupie 4-osobowej jest co najmniej jedna kobieta.
 - c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby kobiet w grupie 8-osobowej.
2. 2% nowo wyprodukowanych procesorów ma ukruszony rdzeń. Laptop wyposażony w taki procesor nadmiernie się nagrzewa; wada ta występuje także w 0,002% laptopów ze sprawnym procesorem. Przyjmujemy, iż wystąpienia ewentualnych wad w różnych laptopach są niezależne.
 - a) Zakupiony laptop się przegrzewa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma uszkodzony procesor?
 - b) Klient kupił dwa laptopy i okazało się, że oba się przegrzewają. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden z nich jest wyposażony w uszkodzony procesor?
 - c) Korzystając z twierdzenia Poissona obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że wśród 200 przegrzewających się laptopów oddanych do serwisu co najwyżej 2 posiadają nieuszkodzony procesor.
3. Student idący na obiad wybiera losowo jedną z trzech kafeterii K_1 , K_2 , K_3 z prawdopodobieństwami odpowiednio $2p$, p oraz $1 - 3p$, gdzie $p \in (0, 1/3)$ jest pewnym ustalonym parametrem. Studenci dokonują wyboru niezależnie, wybory kafeterii w różnych dniach także są niezależne.
 - a) W celu oszacowania p , zapytano 10 studentów, ile razy w ciągu ostatnich pięciu dni wybierali kafenię K_1 . Uzyskano odpowiedzi 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4. Dla jakiego p średnia empiryczna związana z tą próbą pokrywa się z wartością oczekiwaną liczby wyborów kafeterii K_1 ?
 - b) Załóżmy, że czasy oczekiwania w kolejce w kafeteriach K_1 , K_2 oraz K_3 (mierzone w minutach) są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z parametrami 1, $1/2$ oraz $1/3$, odpowiednio. W ciągu kolejnych 30 dni student planuje odwiedzić 15 razy kafenię K_1 , 10 razy kafenię K_2 oraz 5 razy kafenię K_3 . Obliczyć wartość oczekiwaną łącznej ilości czasu (w minutach), jaką spędzi w kolejkach.
4. Pan Kowalski chce zainwestować część swoich oszczędności. Może złożyć pieniądze na lokacie bankowej (i po roku jego zysk wyniesie 2 procent), może także kupić akcje pewnej firmy i wówczas po roku jego zysk (w procentach), jest zmienną losową o dystrybucji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 1, \\ 1 - t^{-3} & \text{jeśli } t \geq 1. \end{cases}$$

Pan Kowalski ma następującą strategię. Rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $1/3$; jeśli wypadnie orzeł, to pan Kowalski umieszcza pieniądze na lokacie, w przeciwnym razie kupuje akcje. Niech Y oznacza zysk (w procentach) pana Kowalskiego po roku, związany z tą strategią.

- a) Wyznaczyć dystrybucję zmiennej Y . Czy Y ma rozkład ciągły? Czy ma rozkład dyskretny?
 - b) Wyznaczyć $\mathbb{E}Y$.
5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 4a^{-4}x^3\mathbb{1}_{(0,a]}(x)$, gdzie $a > 0$ jest pewną stałą.
 - a) Wyznaczyć a , jeśli wiadomo, że kwantyl rzędu $\frac{1}{16}$ rozkładu zmiennej X wynosi 1.
 - b) Obliczyć średnią zmiennej $\frac{1}{X}$ oraz wariancję zmiennej $\frac{3}{X} + 10$.
6. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = 3) = c$.
 - a) Wyznaczyć c .
 - b) Obliczyć $\mathbb{P}(X \geq 2 | X \leq 2)$.
 - c) Zmienna Y ma rozkład normalny o średniej 2 i wariancji λ , przy czym $\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}X^3$. Obliczyć λ .
7. Między 11:00 a 14:00 biznesmen odbył dwie rozmowy telefoniczne: pierwsza z nich zaczęła się o 11:00 i trwała do godziny X , gdzie X jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[11, 14]$; druga rozmowa zaczęła się o godzinie X i zakończyła się o 14:00.
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z rozmów trwała dłużej niż godzinę?
 - b) Obliczyć średni czas trwania krótszej rozmowy (liczony w godzinach).

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 grudnia 2018r., grupa B

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych siedmiu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. **Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D.** Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Grupę 7 kobiet i 6 mężczyzn podzielono losowo na dwie grupy, składające się z 8 oraz 5 osób.
- Obliczyć prawdopodobieństwo, że w obu grupach będą co najmniej dwie kobiety.
 - Obliczyć prawdopodobieństwo, że w grupie 8-osobowej jest co najmniej pięciu mężczyzn, jeśli wiadomo, że w grupie 5-osobowej jest co najmniej jedna kobieta.
 - Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby kobiet w grupie 8-osobowej.

2. 2% nowo wyprodukowanych procesorów ma ukruszony rdzeń. Laptop wyposażony w taki procesor nadmiernie się nagrzewa; wada ta występuje także w 0,004% laptopów ze sprawnym procesorem. Przyjmujemy, iż wystąpienia ewentualnych wad w różnych laptopach są niezależne.

- Zakupiony laptop się przegrzewa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma uszkodzony procesor?
- Klient kupił dwa laptopy i okazało się, że oba się przegrzewają. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden z nich jest wyposażony w nieuszkodzony procesor?
- Korzystając z twierdzenia Poissona obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że wśród 200 przegrzewających się laptopów oddanych do serwisu co najwyżej 3 posiadają nieuszkodzony procesor.

3. Student idący na obiad wybiera losowo jedną z trzech kafeterii K_1 , K_2 , K_3 z prawdopodobieństwami odpowiednio p , $1 - 3p$ oraz $2p$, gdzie $p \in (0, 1/3)$ jest pewnym ustalonym parametrem. Studenci dokonują wyboru niezależnie, wybory kafeterii w różnych dniach także są niezależne.

a) W celu oszacowania p , zapytano 10 studentów, ile razy w ciągu ostatnich pięciu dni wybierali kafeterię K_1 . Uzyskano odpowiedzi 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4. Dla jakiego p średnia empiryczna związana z tą próbą pokrywa się z wartością oczekiwaną liczby wyborów kafeterii K_1 ?

b) Załóżmy, że czasy oczekiwania w kolejce w kafeteriach K_1 , K_2 oraz K_3 (mierzone w minutach) są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z parametrami $1/2$, $1/3$ oraz 1 , odpowiednio. W ciągu kolejnych 30 dni student planuje odwiedzić 10 razy kafeterię K_1 , 5 razy kafeterię K_2 oraz 15 razy kafeterię K_3 . Obliczyć wartość oczekiwaną łącznej ilości czasu (w minutach), jaką spędzi w kolejkach.

4. Pan Kowalski chce zainwestować część swoich oszczędności. Może złożyć pieniądze na lokacie bankowej (i po roku jego zysk wyniesie 3 procent), może także kupić akcje pewnej firmy i wówczas po roku jego zysk (w procentach), jest zmienną losową o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 2, \\ 1 - 4t^{-2} & \text{jeśli } t \geq 2. \end{cases}$$

Pan Kowalski ma następującą strategię. Rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $1/4$; jeśli wypadnie orzeł, to pan Kowalski umieszcza pieniądze na lokacie, w przeciwnym razie kupuje akcje. Niech Y oznacza zysk (w procentach) pana Kowalskiego po roku, związany z tą strategią.

- Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej Y . Czy Y ma rozkład ciągły? Czy ma rozkład dyskretny?
- Wyznaczyć $\mathbb{E}Y$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{3}{8}a^{-3}x^2\mathbb{1}_{(0,2a]}(x)$, gdzie $a > 0$ jest pewną stałą.

- Wyznaczyć a , jeśli wiadomo, że kwantyl rzędu $\frac{1}{27}$ rozkładu zmiennej X wynosi 1.
- Obliczyć średnią zmiennej $\frac{1}{X}$ oraz wariancję zmiennej $\frac{5}{X} - 11$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości $\mathbb{P}(X = 1) = 2\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = c$.

- Wyznaczyć c .
- Obliczyć $\mathbb{P}(X \geq 2 | X \leq 2)$.
- Zmienna Y ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji λ , przy czym $\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}X^2$. Obliczyć λ .

7. Między 10:00 a 13:00 biznesmen odbył dwie rozmowy telefoniczne: pierwsza z nich zaczęła się o 10:00 i trwała do godziny X , gdzie X jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[10, 13]$; druga rozmowa zaczęła się o godzinie X i zakończyła się o 13:00.

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z rozmów trwała dłużej niż godzinę?
- Obliczyć średni czas trwania dłuższej rozmowy (liczony w godzinach).

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 grudnia 2018r., grupa C

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych siedmiu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. **Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D.** Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Grupę 6 kobiet i 7 mężczyzn podzielono losowo na dwie grupy, składające się z 9 oraz 4 osób.
- Obliczyć prawdopodobieństwo, że w obu grupach będą co najmniej dwie kobiety.
 - Obliczyć prawdopodobieństwo, że w grupie 9-osobowej jest co najmniej pięciu mężczyzn, jeśli wiadomo, że w grupie 4-osobowej jest co najmniej jedna kobieta.
 - Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby kobiet w grupie 9-osobowej.

2. 1% nowo wyprodukowanych procesorów ma ukruszony rdzeń. Laptop wyposażony w taki procesor nadmiernie się nagrzewa; wada ta występuje także w 0,003% laptopów ze sprawnym procesorem. Przyjmujemy, iż wystąpienia ewentualnych wad w różnych laptopach są niezależne.

- Zakupiony laptop się przegrzewa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma uszkodzony procesor?
- Klient kupił dwa laptopy i okazało się, że oba się przegrzewają. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden z nich jest wyposażony w nieuszkodzony procesor?
- Korzystając z twierdzenia Poissona obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że wśród 100 przegrzewających się laptopów oddanych do serwisu co najwyżej 2 posiadają nieuszkodzony procesor.

3. Student idący na obiad wybiera losowo jedną z trzech kafeterii K_1 , K_2 , K_3 z prawdopodobieństwami odpowiednio $1 - 3p$, $2p$ oraz p , gdzie $p \in (0, 1/3)$ jest pewnym ustalonym parametrem. Studenci dokonują wyboru niezależnie, wybory kafeterii w różnych dniach także są niezależne.

a) W celu oszacowania p , zapytano 10 studentów, ile razy w ciągu ostatnich pięciu dni wybierali kafeterię K_1 . Uzyskano odpowiedzi 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4. Dla jakiego p średnia empiryczna związana z tą próbą pokrywa się z wartością oczekiwaną liczby wyborów kafeterii K_1 ?

b) Załóżmy, że czasy oczekiwania w kolejce w kafeteriach K_1 , K_2 oraz K_3 (mierzone w minutach) są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z parametrami 1, $1/3$ oraz $1/2$, odpowiednio. W ciągu kolejnych 30 dni student planuje odwiedzić 5 razy kafeterię K_1 , 10 razy kafeterię K_2 oraz 15 razy kafeterię K_3 . Obliczyć wartość oczekiwaną łącznej ilości czasu (w minutach), jaką spędzi w kolejkach.

4. Pan Kowalski chce zainwestować część swoich oszczędności. Może złożyć pieniądze na lokacie bankowej (i po roku jego zysk wyniesie 4 procent), może także kupić akcje pewnej firmy i wówczas po roku jego zysk (w procentach), jest zmienną losową o dystrybucji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 2, \\ 1 - 8t^{-3} & \text{jeśli } t \geq 2. \end{cases}$$

Pan Kowalski ma następującą strategię. Rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $2/3$; jeśli wypadnie orzeł, to pan Kowalski umieszcza pieniądze na lokacie, w przeciwnym razie kupuje akcje. Niech Y oznacza zysk (w procentach) pana Kowalskiego po roku, związany z tą strategią.

- Wyznaczyć dystrybucję zmiennej Y . Czy Y ma rozkład ciągły? Czy ma rozkład dyskretny?
- Wyznaczyć $\mathbb{E}Y$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{9}a^{-3}x^2\mathbb{1}_{(0,3a]}(x)$, gdzie $a > 0$ jest pewną stałą.

- Wyznaczyć a , jeśli wiadomo, że kwantyl rzędu $\frac{1}{8}$ rozkładu zmiennej X wynosi 1.
- Obliczyć średnią zmiennej $\frac{1}{X}$ oraz wariancję zmiennej $\frac{2}{X} + 4$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości $\frac{1}{3}\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = c$.

- Wyznaczyć c .
- Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 2 | X \geq 2)$.
- Zmienna Y ma rozkład normalny o średniej 3 i wariancji λ , przy czym $\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}X^4$. Obliczyć λ .

7. Między 12:00 a 15:00 biznesmen odbył dwie rozmowy telefoniczne: pierwsza z nich zaczęła się o 12:00 i trwała do godziny X , gdzie X jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[12, 15]$; druga rozmowa zaczęła się o godzinie X i zakończyła się o 15:00.

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z rozmów trwała dłużej niż godzinę?
- Obliczyć średni czas trwania dłuższej rozmowy (liczony w godzinach).

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 grudnia 2018r., grupa D

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych siedmiu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. **Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D.** Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Grupę 7 kobiet i 6 mężczyzn podzielono losowo na dwie grupy, składające się z 9 oraz 4 osób.
 - a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że w obu grupach będą co najmniej dwie kobiety.
 - b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że w grupie 9-osobowej jest co najmniej pięciu mężczyzn, jeśli wiadomo, że w grupie 4-osobowej jest co najmniej jedna kobieta.
 - c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby kobiet w grupie 9-osobowej.
2. 1% nowo wyprodukowanych procesorów ma ukruszony rdzeń. Laptop wyposażony w taki procesor nadmiernie się nagrzewa; wada ta występuje także w 0,001% laptopów ze sprawnym procesorem. Przyjmujemy, iż wystąpienia ewentualnych wad w różnych laptopach są niezależne.
 - a) Zakupiony laptop się przegrzewa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma uszkodzony procesor?
 - b) Klient kupił dwa laptopy i okazało się, że oba się przegrzewają. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden z nich jest wyposażony w uszkodzony procesor?
 - c) Korzystając z twierdzenia Poissona obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że wśród 100 przegrzewających się laptopów oddanych do serwisu co najwyżej 3 posiadają nieuszkodzony procesor.
3. Student idący na obiad wybiera losowo jedną z trzech kafeterii K_1 , K_2 , K_3 z prawdopodobieństwami odpowiednio p , $2p$ oraz $1 - 3p$, gdzie $p \in (0, 1/3)$ jest pewnym ustalonym parametrem. Studenci dokonują wyboru niezależnie, wybory kafeterii w różnych dniach także są niezależne.
 - a) W celu oszacowania p , zapytano 10 studentów, ile razy w ciągu ostatnich pięciu dni wybierali kafenię K_1 . Uzyskano odpowiedzi 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4. Dla jakiego p średnia empiryczna związana z tą próbą pokrywa się z wartością oczekiwaną liczby wyborów kafeterii K_1 ?
 - b) Załóżmy, że czasy oczekiwania w kolejce w kafeteriach K_1 , K_2 oraz K_3 (mierzone w minutach) są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z parametrami $1/2$, 1 oraz $1/3$, odpowiednio. W ciągu kolejnych 30 dni student planuje odwiedzić 15 razy kafenię K_1 , 5 razy kafenię K_2 oraz 10 razy kafenię K_3 . Obliczyć wartość oczekiwaną łącznej ilości czasu (w minutach), jaką spędzi w kolejkach.
4. Pan Kowalski chce zainwestować część swoich oszczędności. Może złożyć pieniądze na lokacie bankowej (i po roku jego zysk wyniesie 3 procent), może także kupić akcje pewnej firmy i wówczas po roku jego zysk (w procentach), jest zmienną losową o dystrybucji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 1, \\ 1 - t^{-2} & \text{jeśli } t \geq 1. \end{cases}$$

Pan Kowalski ma następującą strategię. Rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi $1/5$; jeśli wypadnie orzeł, to pan Kowalski umieszcza pieniądze na lokacie, w przeciwnym razie kupuje akcje. Niech Y oznacza zysk (w procentach) pana Kowalskiego po roku, związany z tą strategią.

- a) Wyznaczyć dystrybucję zmiennej Y . Czy Y ma rozkład ciągły? Czy ma rozkład dyskretny?
 - b) Wyznaczyć $\mathbb{E}Y$.
5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{4}a^{-4}x^3\mathbb{1}_{(0,2a]}(x)$, gdzie $a > 0$ jest pewną stałą.
 - a) Wyznaczyć a , jeśli wiadomo, że kwantyl rzędu $\frac{1}{16}$ rozkładu zmiennej X wynosi 1.
 - b) Obliczyć średnią zmiennej $\frac{1}{X}$ oraz wariancję zmiennej $\frac{4}{X} - 5$.
6. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości $3\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = c$.
 - a) Wyznaczyć c .
 - b) Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 2 | X \geq 2)$.
 - c) Zmienna Y ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji λ , przy czym $\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}X^3$. Obliczyć λ .
7. Między 13:00 a 16:00 biznesmen odbył dwie rozmowy telefoniczne: pierwsza z nich zaczęła się o 13:00 i trwała do godziny X , gdzie X jest zmienną o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[13, 16]$; druga rozmowa zaczęła się o godzinie X i zakończyła się o 16:00.
 - a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z rozmów trwała dłużej niż godzinę?
 - b) Obliczyć średni czas trwania krótszej rozmowy (liczony w godzinach).