

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 marca 2018r., grupa A

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, liczone będzie 5 najlepszych rozwiązań. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem (DRUKOWANYMI LITERAMI), numerem indeksu oraz **literą grupy**. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Dwie osoby zagrały w Lotto: każda z nich wybrała 6 liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 49\}$, a następnie porównano wybrane zestawy liczb.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dokładnie jedna liczba się powtórzyła (została wybrana przez obie osoby).

b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby powtarzających się liczb (wybranych przez obie osoby).

2. Liczba wypadków na pewnym skrzyżowaniu w lutym jest zmienną losową X o rozkładzie zadany przez $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$. Każdy wypadek, niezależnie od wcześniejszych wydarzeń, jest albo poważny, albo lekki (co ma miejsce z prawdopodobieństwami $\frac{1}{5}$ i $\frac{4}{5}$, odpowiednio). Niech Y oznacza liczbę poważnych wypadków w lutym. Obliczyć $\mathbb{P}(X = 3|Y = 2)$ oraz $\mathbb{E}(Y|X)$.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, przy czym wiadomo, że zmienne $X + Y$ oraz Y są niezależne i mają średnią -1 i wariancję 2. Obliczyć $\mathbb{E}XY$ oraz wyznaczyć rozkład zmiennej $2X + Y + 1$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 72x^{-4}y^2\mathbb{1}_{\{x \geq 2, 0 \leq y \leq 1\}}$. Obliczyć $\mathbb{P}(XY > 1)$ oraz $\text{Var}(XY^{-1} + 1)$.

5. Pan Nowak lokuje część swoich oszczędności w obcych walutach. Na początku każdego miesiąca kupuje on sto lub dwieście koron (każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak kupi nie więcej niż 15200 koron.

b) W połowie każdego miesiąca, pan Nowak rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $1/3$. W przypadku gdy wypadnie orzeł, pan Nowak nie podejmuje żadnych działań; jeśli zaś wypadnie reszka, to przeznaczają połowę koron wykupionych tego miesiąca na zakup złotych monet. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w przeciągu 150 kolejnych miesięcy pan Nowak przeznaczy na zakup monet mniej niż 8 tysięcy koron.

6. Stado gołębi przemieszcza się pomiędzy czterema miastami M_1, M_2, M_3, M_4 , leżącymi w tej właśnie kolejności wzdłuż Odry. Każdego dnia wieczorem stado decyduje się albo pozostać w mieście, w którym się aktualnie znajduje, albo udać do jednego z bezpośrednio sąsiadujących miast (każda opcja ma to samo prawdopodobieństwo, przelot między różnymi miastami trwa jedną noc). Pierwszy dzień stado spędza w mieście M_1 .

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_1 , czy to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_3 ?

b) Po ilu średnio dniach stado odwiedzi miasto M_4 po raz pierwszy?

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 dniach stado znajdzie się rankiem w M_4 .

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 marca 2018r., grupa A (I termin)

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, liczone będzie 5 najlepszych rozwiązań. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem (DRUKOWANYMI LITERAMI), numerem indeksu oraz **literą grupy**. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, przy czym wiadomo, że zmienne $X + Y$ oraz Y są niezależne i mają średnią -1 i wariancję 2 . Obliczyć $\mathbb{E}XY$ oraz wyznaczyć rozkład zmiennej $2X + Y + 1$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 72x^{-4}y^2\mathbb{1}_{\{x \geq 2, 0 \leq y \leq 1\}}$. Obliczyć $\mathbb{P}(XY > 1)$ oraz $\text{Var}(XY^{-1} + 1)$.

5. Pan Nowak lokuje część swoich oszczędności w obcych walutach. Na początku każdego miesiąca kupuje on sto lub dwieście koron (każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak kupi nie więcej niż 15200 koron.

b) W połowie każdego miesiąca, pan Nowak rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $1/3$. W przypadku gdy wypadnie orzeł, pan Nowak nie podejmuje żadnych działań; jeśli zaś wypadnie reszka, to przeznaczają połowę koron wykupionych tego miesiąca na zakup złotych monet. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w przeciągu 150 kolejnych miesięcy pan Nowak przeznaczy na zakup monet mniej niż 8 tysięcy koron.

6. Stado gołębi przemieszcza się pomiędzy czterema miastami M_1, M_2, M_3, M_4 , leżącymi w tej właśnie kolejności wzdłuż Odry. Każdego dnia wieczorem stado decyduje się albo pozostać w mieście, w którym się aktualnie znajduje, albo udać do jednego z bezpośrednio sąsiadujących miast (każda opcja ma to samo prawdopodobieństwo, przelot między różnymi miastami trwa jedną noc). Pierwszy dzień stado spędza w mieście M_1 .

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_1 , czy to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_3 ?

b) Po ilu średnio dniach stado odwiedzi miasto M_4 po raz pierwszy?

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 dniach stado znajdzie się rankiem w M_4 .

7. Rzucamy nieskończenie wiele razy prawidłową kostką.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba dwójek uzyskanych w stu pierwszych rzutach będzie się różnić o co najmniej 10 od łącznej liczby trójek uzyskanych w rzutach o numerach 101, 102, ..., 200.

b) Dla $n = 1, 2, \dots$, niech X_n, Y_n oznaczają odpowiednio liczby dwójek i trójek uzyskanych w pierwszych n rzutach. Rozstrzygnąć, czy ciąg $\frac{X_n Y_n}{n^2 + 1}$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny prawie na pewno. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć jego granicę.

8. Wydobycie niklu w 2020 roku (mierzone w milionach ton) może być opisane zmienną losową X o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. W przypadku, gdy $X = x$, cena jednej tony niklu w dniu 1 stycznia 2021 roku (liczona w tysiącach koron) będzie miała rozkład wykładniczy z parametrem x .

a) Wyznaczyć rozkład ceny niklu w dniu 1 stycznia 2021 roku.

b) Przypuśćmy, że w dniu 1 stycznia cena przekracza 2 tysiące koron. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wiąże się to z wydobyciem niklu w 2020 roku na poziomie przekraczającym 3 miliony ton?

Wskazówka: Dla dowolnej liczby $a > 0$ zachodzi równość $\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 marca 2018r., grupa B

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, liczone będzie 5 najlepszych rozwiązań. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem (DRUKOWANYMI LITERAMI), numerem indeksu oraz **literą grupy**. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Dwie osoby zagrały w Lotterię: każda z nich wybrała 5 liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 49\}$, a następnie porównano wybrane zestawy liczb.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dokładnie jedna liczba się powtórzyła (została wybrana przez obie osoby).

b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby powtarzających się liczb (wybranych przez obie osoby).

2. Liczba wypadków na pewnym skrzyżowaniu w lutym jest zmienną losową X o rozkładzie zadany przez $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{7}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{7}$. Każdy wypadek, niezależnie od wcześniejszych wydarzeń, jest albo poważny, albo lekki (co ma miejsce z prawdopodobieństwami $\frac{1}{6}$ i $\frac{5}{6}$, odpowiednio). Niech Y oznacza liczbę poważnych wypadków w lutym. Obliczyć $\mathbb{P}(X = 4|Y = 2)$ oraz $\mathbb{E}(Y|X)$.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, przy czym wiadomo, że zmienne $X + Y$ oraz Y są niezależne i mają średnią 1 i wariancję 3. Obliczyć $\mathbb{E}XY$ oraz wyznaczyć rozkład zmiennej $X + 2Y - 1$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 72x^2y^{-4}\mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1, y \geq 2\}}$. Obliczyć $\mathbb{P}(XY > 1)$ oraz $\text{Var}(X^{-1}Y + 2)$.

5. Pan Nowak lokuje część swoich oszczędności w obcych walutach. Na początku każdego miesiąca kupuje on sto lub trzysta koron (każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak kupi nie więcej niż 20200 koron.

b) W połowie każdego miesiąca, pan Nowak rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $3/4$. W przypadku gdy wypadnie orzeł, pan Nowak nie podejmuje żadnych działań; jeśli zaś wypadnie reszka, to przeznaczają połowę koron wykupionych tego miesiąca na zakup złotych monet. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak przeznaczy na zakup monet mniej niż 3 tysiące koron.

6. Stado gołębi przemieszcza się pomiędzy czterema miastami M_1, M_2, M_3, M_4 , leżącymi w tej właśnie kolejności wzdłuż Odry. Każdego dnia wieczorem stado decyduje się albo pozostać w mieście, w którym się aktualnie znajduje, albo udać do jednego z bezpośrednio sąsiadujących miast (każda opcja ma to samo prawdopodobieństwo, przelot między różnymi miastami trwa jedną noc). Pierwszy dzień stado spędza w mieście M_4 .

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_4 , czy to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_2 ?

b) Po ilu średnio dniach stado odwiedzi miasto M_1 po raz pierwszy?

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 dniach stado znajdzie się rankiem w M_2 .

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 marca 2018r., grupa B (I termin)

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, liczone będzie 5 najlepszych rozwiązań. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem (DRUKOWANYMI LITERAMI), numerem indeksu oraz **literą grupy**. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, przy czym wiadomo, że zmienne $X + Y$ oraz Y są niezależne i mają średnią 1 i wariancję 3. Obliczyć $\mathbb{E}XY$ oraz wyznaczyć rozkład zmiennej $X + 2Y - 1$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 72x^2y^{-4}\mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1, y \geq 2\}}$. Obliczyć $\mathbb{P}(XY > 1)$ oraz $\text{Var}(X^{-1}Y + 2)$.

5. Pan Nowak lokuje część swoich oszczędności w obcych walutach. Na początku każdego miesiąca kupuje on sto lub trzysta koron (każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak kupi nie więcej niż 20200 koron.

b) W połowie każdego miesiąca, pan Nowak rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $3/4$. W przypadku gdy wypadnie orzeł, pan Nowak nie podejmuje żadnych działań; jeśli zaś wypadnie reszka, to przeznaczają połowę koron wykupionych tego miesiąca na zakup złotych monet. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak przeznaczy na zakup monet mniej niż 3 tysiące koron.

6. Stado gołębi przemieszcza się pomiędzy czterema miastami M_1, M_2, M_3, M_4 , leżącymi w tej właśnie kolejności wzdłuż Odry. Każdego dnia wieczorem stado decyduje się albo pozostać w mieście, w którym się aktualnie znajduje, albo udać do jednego z bezpośrednio sąsiadujących miast (każda opcja ma to samo prawdopodobieństwo, przelot między różnymi miastami trwa jedną noc). Pierwszy dzień stado spędza w mieście M_4 .

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_4 , czy to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_2 ?

b) Po ilu średnio dniach stado odwiedzi miasto M_1 po raz pierwszy?

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 dniach stado znajdzie się rankiem w M_2 .

7. Rzucamy nieskończenie wiele razy prawidłową kostką.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba dwójek uzyskanych w stu pierwszych rzutach będzie się różnić o co najmniej 10 od łącznej liczby trójek uzyskanych w rzutach o numerach 101, 102, ..., 200.

b) Dla $n = 1, 2, \dots$, niech X_n, Y_n oznaczają odpowiednio liczby dwójek i trójek uzyskanych w pierwszych n rzutach. Rozstrzygnąć, czy ciąg $\frac{X_n Y_n}{n^2 + 1}$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny prawie na pewno. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć jego granicę.

8. Wydobycie niklu w 2020 roku (mierzone w milionach ton) może być opisane zmienną losową X o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. W przypadku, gdy $X = x$, cena jednej tony niklu w dniu 1 stycznia 2021 roku (liczona w tysiącach koron) będzie miała rozkład wykładniczy z parametrem x .

a) Wyznaczyć rozkład ceny niklu w dniu 1 stycznia 2021 roku.

b) Przypuśćmy, że w dniu 1 stycznia cena przekracza 2 tysiące koron. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wiąże się to z wydobyciem niklu w 2020 roku na poziomie przekraczającym 3 miliony ton?

Wskazówka: Dla dowolnej liczby $a > 0$ zachodzi równość $\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 marca 2018r., grupa C

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, liczone będzie 5 najlepszych rozwiązań. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem (DRUKOWANYMI LITERAMI), numerem indeksu oraz **literą grupy**. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Dwie osoby zagrały w Lotterię: każda z nich wybrała 7 liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 49\}$, a następnie porównano wybrane zestawy liczb.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dokładnie jedna liczba się powtórzyła (została wybrana przez obie osoby).

b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby powtarzających się liczb (wybranych przez obie osoby).

2. Liczba wypadków na pewnym skrzyżowaniu w lutym jest zmienną losową X o rozkładzie zadany przez $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$. Każdy wypadek, niezależnie od wcześniejszych wydarzeń, jest albo poważny, albo lekki (co ma miejsce z prawdopodobieństwami $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$, odpowiednio). Niech Y oznacza liczbę poważnych wypadków w lutym. Obliczyć $\mathbb{P}(X = 4|Y = 3)$ oraz $\mathbb{E}(Y|X)$.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, przy czym wiadomo, że zmienne $X - Y$ oraz Y są niezależne i mają średnią -2 i wariancję 2 . Obliczyć $\mathbb{E}XY$ oraz wyznaczyć rozkład zmiennej $3X + Y - 1$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{9}{8}x^{-4}y^2\mathbb{1}_{\{x \geq 1, 0 \leq y \leq 2\}}$. Obliczyć $\mathbb{P}(XY > 1)$ oraz $\text{Var}(2XY^{-1} - 3)$.

5. Pan Nowak lokuje część swoich oszczędności w obcych walutach. Na początku każdego miesiąca kupuje on sto lub trzysta koron (każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak kupi więcej niż 19800 koron.

b) W połowie każdego miesiąca, pan Nowak rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $1/4$. W przypadku gdy wypadnie orzeł, pan Nowak nie podejmuje żadnych działań; jeśli zaś wypadnie reszka, to przeznaczają połowę koron wykupionych tego miesiąca na zakup złotych monet. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w przeciągu 150 kolejnych miesięcy pan Nowak przeznaczy na zakup monet więcej niż 12 tysięcy koron.

6. Stado gołębi przemieszcza się pomiędzy czterema miastami M_1, M_2, M_3, M_4 , leżącymi w tej właśnie kolejności wzdłuż Odry. Każdego dnia wieczorem stado decyduje się albo pozostać w mieście, w którym się aktualnie znajduje, albo udać do jednego z bezpośrednio sąsiadujących miast (każda opcja ma to samo prawdopodobieństwo, przelot między różnymi miastami trwa jedną noc). Pierwszy dzień stado spędza w mieście M_2 .

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_1 , czy to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_3 ?

b) Po ilu średnio dniach stado odwiedzi miasto M_4 po raz pierwszy?

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 dniach stado znajdzie się rankiem w M_3 .

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 marca 2018r., grupa C (I termin)

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, liczone będzie 5 najlepszych rozwiązań. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem (DRUKOWANYMI LITERAMI), numerem indeksu oraz **literą grupy**. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, przy czym wiadomo, że zmienne $X - Y$ oraz Y są niezależne i mają średnią -2 i wariancję 2 . Obliczyć $\mathbb{E}XY$ oraz wyznaczyć rozkład zmiennej $3X + Y - 1$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{9}{8}x^{-4}y^2\mathbb{1}_{\{x \geq 1, 0 \leq y \leq 2\}}$. Obliczyć $\mathbb{P}(XY > 1)$ oraz $\text{Var}(2XY^{-1} - 3)$.

5. Pan Nowak lokuje część swoich oszczędności w obcych walutach. Na początku każdego miesiąca kupuje on sto lub trzysta koron (każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak kupi więcej niż 19800 koron.

b) W połowie każdego miesiąca, pan Nowak rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $1/4$. W przypadku gdy wypadnie orzeł, pan Nowak nie podejmuje żadnych działań; jeśli zaś wypadnie reszka, to przeznaczają połowę koron wykupionych tego miesiąca na zakup złotych monet. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w przeciągu 150 kolejnych miesięcy pan Nowak przeznaczy na zakup monet więcej niż 12 tysięcy koron.

6. Stado gołębi przemieszcza się pomiędzy czterema miastami M_1, M_2, M_3, M_4 , leżącymi w tej właśnie kolejności wzdłuż Odry. Każdego dnia wieczorem stado decyduje się albo pozostać w mieście, w którym się aktualnie znajduje, albo udać do jednego z bezpośrednio sąsiadujących miast (każda opcja ma to samo prawdopodobieństwo, przelot między różnymi miastami trwa jedną noc). Pierwszy dzień stado spędza w mieście M_2 .

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_1 , czy to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_3 ?

b) Po ilu średnio dniach stado odwiedzi miasto M_4 po raz pierwszy?

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 dniach stado znajdzie się rankiem w M_3 .

7. Rzucamy nieskończenie wiele razy prawidłową kostką.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba dwójek uzyskanych w stu pierwszych rzutach będzie się różnić o co najmniej 10 od łącznej liczby trójek uzyskanych w rzutach o numerach 101, 102, ..., 200.

b) Dla $n = 1, 2, \dots$, niech X_n, Y_n oznaczają odpowiednio liczby dwójek i trójek uzyskanych w pierwszych n rzutach. Rozstrzygnąć, czy ciąg $\frac{X_n Y_n}{n^2 + 1}$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny prawie na pewno. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć jego granicę.

8. Wydobycie niklu w 2020 roku (mierzone w milionach ton) może być opisane zmienną losową X o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. W przypadku, gdy $X = x$, cena jednej tony niklu w dniu 1 stycznia 2021 roku (liczona w tysiącach koron) będzie miała rozkład wykładniczy z parametrem x .

a) Wyznaczyć rozkład ceny niklu w dniu 1 stycznia 2021 roku.

b) Przypuśćmy, że w dniu 1 stycznia cena przekracza 2 tysiące koron. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wiąże się to z wydobyciem niklu w 2020 roku na poziomie przekraczającym 3 miliony ton?

Wskazówka: Dla dowolnej liczby $a > 0$ zachodzi równość $\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 marca 2018r., grupa D

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, liczone będzie 5 najlepszych rozwiązań. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem (DRUKOWANYMI LITERAMI), numerem indeksu oraz **literą grupy**. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Dwie osoby zagrały w Lotterię: każda z nich wybrała 4 liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, 49\}$, a następnie porównano wybrane zestawy liczb.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dokładnie jedna liczba się powtórzyła (została wybrana przez obie osoby).

b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby powtarzających się liczb (wybranych przez obie osoby).

2. Liczba wypadków na pewnym skrzyżowaniu w lutym jest zmienną losową X o rozkładzie zadany przez $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{9}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{5}{9}$. Każdy wypadek, niezależnie od wcześniejszych wydarzeń, jest albo poważny, albo lekki (co ma miejsce z prawdopodobieństwami $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$, odpowiednio). Niech Y oznacza liczbę poważnych wypadków w lutym. Obliczyć $\mathbb{P}(X = 4|Y = 2)$ oraz $\mathbb{E}(Y|X)$.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, przy czym wiadomo, że zmienne $X - Y$ oraz Y są niezależne i mają średnią 2 i wariancję 2. Obliczyć $\mathbb{E}XY$ oraz wyznaczyć rozkład zmiennej $2X - Y + 1$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{9}{8}x^2y^{-4}\mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 2, y \geq 1\}}$. Obliczyć $\mathbb{P}(XY > 1)$ oraz $\text{Var}(3X^{-1}Y - 1)$.

5. Pan Nowak lokuje część swoich oszczędności w obcych walutach. Na początku każdego miesiąca kupuje on sto lub dwieście koron (każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak kupi mniej niż 14800 koron.

b) W połowie każdego miesiąca, pan Nowak rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $\frac{3}{5}$. W przypadku gdy wypadnie orzeł, pan Nowak nie podejmuje żadnych działań; jeśli zaś wypadnie reszka, to przeznaczają połowę koron wykupionych tego miesiąca na zakup złotych monet. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak przeznaczy na zakup monet mniej niż 4 tysiące koron.

6. Stado gołębi przemieszcza się pomiędzy czterema miastami M_1, M_2, M_3, M_4 , leżącymi w tej właśnie kolejności wzdłuż Odry. Każdego dnia wieczorem stado decyduje się albo pozostać w mieście, w którym się aktualnie znajduje, albo udać do jednego z bezpośrednio sąsiadujących miast (każda opcja ma to samo prawdopodobieństwo, przelot między różnymi miastami trwa jedną noc). Pierwszy dzień stado spędza w mieście M_3 .

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_2 , czy to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_4 ?

b) Po ilu średnio dniach stado odwiedzi miasto M_1 po raz pierwszy?

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 dniach stado znajdzie się rankiem w M_1 .

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 7 marca 2018r., grupa D (I termin)

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, liczone będzie 5 najlepszych rozwiązań. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem (DRUKOWANYMI LITERAMI), numerem indeksu oraz **literą grupy**. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny, przy czym wiadomo, że zmienne $X - Y$ oraz Y są niezależne i mają średnią 2 i wariancję 2. Obliczyć $\mathbb{E}XY$ oraz wyznaczyć rozkład zmiennej $2X - Y + 1$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{9}{8}x^2y^{-4}\mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 2, y \geq 1\}}$. Obliczyć $\mathbb{P}(XY > 1)$ oraz $\text{Var}(3X^{-1}Y - 1)$.

5. Pan Nowak lokuje część swoich oszczędności w obcych walutach. Na początku każdego miesiąca kupuje on sto lub dwieście koron (każda możliwość ma to samo prawdopodobieństwo).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak kupi mniej niż 14800 koron.

b) W połowie każdego miesiąca, pan Nowak rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $3/5$. W przypadku gdy wypadnie orzeł, pan Nowak nie podejmuje żadnych działań; jeśli zaś wypadnie reszka, to przeznaczają połowę koron wykupionych tego miesiąca na zakup złotych monet. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w przeciągu 100 kolejnych miesięcy pan Nowak przeznaczy na zakup monet mniej niż 4 tysiące koron.

6. Stado gołębi przemieszcza się pomiędzy czterema miastami M_1, M_2, M_3, M_4 , leżącymi w tej właśnie kolejności wzdłuż Odry. Każdego dnia wieczorem stado decyduje się albo pozostać w mieście, w którym się aktualnie znajduje, albo udać do jednego z bezpośrednio sąsiadujących miast (każda opcja ma to samo prawdopodobieństwo, przelot między różnymi miastami trwa jedną noc). Pierwszy dzień stado spędza w mieście M_3 .

a) Co jest bardziej prawdopodobne: to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_2 , czy to, że rankiem trzeciego dnia stado będzie w mieście M_4 ?

b) Po ilu średnio dniach stado odwiedzi miasto M_1 po raz pierwszy?

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 dniach stado znajdzie się rankiem w M_1 .

7. Rzucamy nieskończenie wiele razy prawidłową kostką.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba dwójek uzyskanych w stu pierwszych rzutach będzie się różnić o co najmniej 10 od łącznej liczby trójek uzyskanych w rzutach o numerach 101, 102, ..., 200.

b) Dla $n = 1, 2, \dots$, niech X_n, Y_n oznaczają odpowiednio liczby dwójek i trójek uzyskanych w pierwszych n rzutach. Rozstrzygnąć, czy ciąg $\frac{X_n Y_n}{n^2 + 1}$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny prawie na pewno. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć jego granicę.

8. Wydobycie niklu w 2020 roku (mierzone w milionach ton) może być opisane zmienną losową X o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. W przypadku, gdy $X = x$, cena jednej tony niklu w dniu 1 stycznia 2021 roku (liczona w tysiącach koron) będzie miała rozkład wykładniczy z parametrem x .

a) Wyznaczyć rozkład ceny niklu w dniu 1 stycznia 2021 roku.

b) Przypuśćmy, że w dniu 1 stycznia cena przekracza 2 tysiące koron. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wiąże się to z wydobyciem niklu w 2020 roku na poziomie przekraczającym 3 miliony ton?

Wskazówka: Dla dowolnej liczby $a > 0$ zachodzi równość $\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$.