

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 10 marca 2017r., grupa A,
II termin**

Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i oznaczeniem grupy (A, B, ...). Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyżej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. 5 kul ponumerowanych liczbami 1, 2, ..., 5 umieszczono losowo w czterech urnach.

- a) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby urn, w których znajduje się co najmniej jedna kula.
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że kule z numerami 1 i 2 są w tej samej urnie, jeśli wiadomo, że w każdej urnie znajduje się co najmniej jedna kula?

2. Zakładamy, że liczba samochodów w rodzinie, losowo wybranej z pewnej populacji, jest zmienną losową X o rozkładzie $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 4/9$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/9$. Każdy z samochodów, niezależnie od pozostałych, został pomalowany na jeden z trzech kolorów: na niebiesko, zielono lub czerwono (wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny).

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 10 rodzin są co najmniej dwie bez czerwonego samochodu. Przyjmujemy, że liczby samochodów w różnych rodzinach są niezależne.
- b) Załóżmy, że w pewnej ustalonej rodzinie nie ma czerwonego samochodu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w tej rodzinie są dokładnie dwa samochody.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = cx \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 2\}}$. Obliczyć c , gęstość zmiennej X oraz $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq 1)$.

4. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym X i Y mają rozkład $N(1, 4)$, a Z ma rozkład $N(1, 2)$.

- a) Wyznaczyć takie parametry a, b , by zmienne $aX + Y$ oraz bZ miały ten sam rozkład.
- b) Obliczyć $\mathbb{E} \left(\frac{X + Y}{Z^2 + 1} \middle| Z + 1 \right)$.
- c) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej (X, XY) .

5. Prawdopodobieństwo, że podróżny kupujący bilet na pociąg woli siedzieć w wagonie z przedziałami (odp. bez przedziałów) wynosi $3/4$ (odp. $1/4$). Bilety kupuje 400 podróżnych.

a) Bilet w wagonie bez przedziałów kosztuje 100 złotych, a w wagonie z przedziałami 110 złotych. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że kwota uzyskana ze sprzedaży biletów przekroczy 40800 złotych.

b) Przypuśćmy, że w pociągu jest 400 miejsc w wagonach z przedziałami i 100 miejsc w wagonach bezprzedziałowych. W razie braku miejsca preferowanego typu, podróżny wykupuje miejsce drugiego typu. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że każdy podróżny dostał miejsce zgodne ze swoją preferencją (tzn. w wagonie z przedziałami lub bez).

6. Naukowiec mający 3 parasole wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (prawdopodobieństwo $1/5$), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (prawdopodobieństwo $4/5$). Zakładamy, że każdego dnia naukowiec odwiedza biuro dokładnie raz. Stanem łańcucha Markowa jest liczba parasoli znajdujących się pod ręką, bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy.

- a) Skonstruować macierz przejścia.
- b) Znaleźć rozkład stacjonarny.
- c) Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca w drodze do pracy w danym, odległym dniu.

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 10 marca 2017r., grupa B,
II termin**

Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i oznaczeniem grupy (A, B, ...). Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyższej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. 6 kul ponumerowanych liczbami 1, 2, ..., 6 umieszczono losowo w pięciu urnach.

- a) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby urn, w których znajduje się co najmniej jedna kula.
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że kule z numerami 1 i 2 są w tej samej urnie, jeśli wiadomo, że w każdej urnie znajduje się co najmniej jedna kula?

2. Zakładamy, że liczba samochodów w rodzinie, losowo wybranej z pewnej populacji, jest zmienną losową X o rozkładzie $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 3/7$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/7$. Każdy z samochodów, niezależnie od pozostałych, został pomalowany na jeden z trzech kolorów: na niebiesko, zielono lub czerwono (wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny).

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 9 rodzin są co najmniej dwie bez czerwonego samochodu. Przyjmujemy, że liczby samochodów w różnych rodzinach są niezależne.
- b) Załóżmy, że w pewnej ustalonej rodzinie nie ma zielonego samochodu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w tej rodzinie są dokładnie dwa samochody.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = cy \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 2\}}$. Obliczyć c , gęstość zmiennej Y oraz $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq 1)$.

4. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym X i Y mają rozkład $N(-1, 4)$, a Z ma rozkład $N(-1, 2)$.

- a) Wyznaczyć takie parametry a, b , by zmienne $X + aY$ oraz bZ miały ten sam rozkład.

b) Obliczyć $\mathbb{E} \left(\frac{X + 2Y}{Z^2 + 2} \middle| Z + 1 \right)$.

- c) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej (X, XZ) .

5. Prawdopodobieństwo, że podróżny kupujący bilet na pociąg woli siedzieć w wagonie z przedziałami (odp. bez przedziałów) wynosi $3/5$ (odp. $2/5$). Bilety kupuje 900 podróżnych.

a) Bilet w wagonie bez przedziałów kosztuje 100 złotych, a w wagonie z przedziałami 110 złotych. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że kwota uzyskana ze sprzedaży biletów przekroczy 93000 złotych.

b) Przypuśćmy, że w pociągu jest 900 miejsc w wagonach z przedziałami i 100 miejsc w wagonach bezprzedziałowych. W razie braku miejsca preferowanego typu, podróżny wykupuje miejsce drugiego typu. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że każdy podróżny dostał miejsce zgodne ze swoją preferencją (tzn. w wagonie z przedziałami lub bez).

6. Naukowiec mający 3 parasole wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (prawdopodobieństwo $1/4$), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (prawdopodobieństwo $3/4$). Zakładamy, że każdego dnia naukowiec odwiedza biuro dokładnie raz. Stanem łańcucha Markowa jest liczba parasoli znajdujących się pod ręką, bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy.

- a) Skonstruować macierz przejścia.
- b) Znaleźć rozkład stacjonarny.
- c) Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca w drodze do pracy w danym, odległym dniu.

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 10 marca 2017r., grupa C,
II termin**

Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i oznaczeniem grupy (A, B, ...). Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyższej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. 5 kul ponumerowanych liczbami 1, 2, ..., 5 umieszczono losowo w czterech urnach.

- a) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby urn, w których znajduje się co najmniej jedna kula.
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że kule z numerami 4 i 5 są w tej samej urnie, jeśli wiadomo, że w każdej urnie znajduje się co najmniej jedna kula?

2. Zakładamy, że liczba samochodów w rodzinie, losowo wybranej z pewnej populacji, jest zmienną losową X o rozkładzie $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 5/11$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/11$. Każdy z samochodów, niezależnie od pozostałych, został pomalowany na jeden z trzech kolorów: na niebiesko, zielono lub czerwono (wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny).

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 8 rodzin są co najmniej dwie bez niebieskiego samochodu. Przyjmujemy, że liczby samochodów w różnych rodzinach są niezależne.
- b) Załóżmy, że w pewnej ustalonej rodzinie nie ma niebieskiego samochodu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w tej rodzinie są dokładnie dwa samochody.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = cx \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0, x+3y \leq 3\}}$. Obliczyć c , gęstość zmiennej X oraz $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq 1)$.

4. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym X i Y mają rozkład $N(-1, 4)$, a Z ma rozkład $N(-1, 2)$.

- a) Wyznaczyć takie parametry a, b , by zmienne $aX - Y$ oraz bZ miały ten sam rozkład.

b) Obliczyć $\mathbb{E} \left(\frac{X + 3Y}{Z^2 + 3} \middle| Z + 1 \right)$.

- c) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej (Y, YZ) .

5. Prawdopodobieństwo, że podróżny kupujący bilet na pociąg woli siedzieć w wagonie z przedziałami (odp. bez przedziałów) wynosi $1/4$ (odp. $3/4$). Bilety kupuje 400 podróżnych.

a) Bilet w wagonie bez przedziałów kosztuje 100 złotych, a w wagonie z przedziałami 110 złotych. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że kwota uzyskana ze sprzedaży biletów przekroczy 43000 złotych.

b) Przypuśćmy, że w pociągu jest 100 miejsc w wagonach z przedziałami i 400 miejsc w wagonach bezprzedziałowych. W razie braku miejsca preferowanego typu, podróżny wykupuje miejsce drugiego typu. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że każdy podróżny dostał miejsce zgodne ze swoją preferencją (tzn. w wagonie z przedziałami lub bez).

6. Naukowiec mający 3 parasole wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (prawdopodobieństwo $1/3$), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (prawdopodobieństwo $2/3$). Zakładamy, że każdego dnia naukowiec odwiedza biuro dokładnie raz. Stanem łańcucha Markowa jest liczba parasoli znajdujących się pod ręką, bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy.

- a) Skonstruować macierz przejścia.
- b) Znaleźć rozkład stacjonarny.
- c) Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca w drodze do pracy w danym, odległym dniu.

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 10 marca 2017r., grupa D,
II termin**

Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i oznaczeniem grupy (A, B, ...). Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyżej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. 5 kul ponumerowanych liczbami 1, 2, ..., 6 umieszczono losowo w pięciu urnach.

- a) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby urn, w których znajduje się co najmniej jedna kula.
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że kule z numerami 5 i 6 są w tej samej urnie, jeśli wiadomo, że w każdej urnie znajduje się co najmniej jedna kula?

2. Zakładamy, że liczba samochodów w rodzinie, losowo wybranej z pewnej populacji, jest zmienną losową X o rozkładzie $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 2/5$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/5$. Każdy z samochodów, niezależnie od pozostałych, został pomalowany na jeden z trzech kolorów: na niebiesko, zielono lub czerwono (wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny).

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 12 rodzin są co najmniej dwie bez czerwonego samochodu. Przyjmujemy, że liczby samochodów w różnych rodzinach są niezależne.
- b) Załóżmy, że w pewnej ustalonej rodzinie nie ma czerwonego samochodu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w tej rodzinie są dokładnie dwa samochody.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = cy \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \leq 3\}}$. Obliczyć c , gęstość zmiennej Y oraz $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq 1)$.

4. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym X i Y mają rozkład $N(1, 4)$, a Z ma rozkład $N(1, 2)$.

- a) Wyznaczyć takie parametry a, b , by zmienne $aX - Y$ oraz bZ miały ten sam rozkład.
- b) Obliczyć $\mathbb{E} \left(\frac{2X + Y}{2Z^2 + 1} \middle| Z + 1 \right)$.
- c) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej (YZ, Y) .

5. Prawdopodobieństwo, że podróżny kupujący bilet na pociąg woli siedzieć w wagonie z przedziałami (odp. bez przedziałów) wynosi $2/5$ (odp. $3/5$). Bilety kupuje 900 podróżnych.

a) Bilet w wagonie bez przedziałów kosztuje 100 złotych, a w wagonie z przedziałami 110 złotych. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że kwota uzyskana ze sprzedaży biletów przekroczy 95000 złotych.

b) Przypuśćmy, że w pociągu jest 100 miejsc w wagonach z przedziałami i 900 miejsc w wagonach bezprzedziałowych. W razie braku miejsca preferowanego typu, podróżny wykupuje miejsce drugiego typu. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że każdy podróżny dostał miejsce zgodne ze swoją preferencją (tzn. w wagonie z przedziałami lub bez).

6. Naukowiec mający 3 parasole wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (prawdopodobieństwo $1/6$), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (prawdopodobieństwo $5/6$). Zakładamy, że każdego dnia naukowiec odwiedza biuro dokładnie raz. Stanem łańcucha Markowa jest liczba parasoli znajdujących się pod ręką, bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy.

- a) Skonstruować macierz przejścia.
- b) Znaleźć rozkład stacjonarny.
- c) Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca w drodze do pracy w danym, odległym dniu.

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 10 marca 2017r., grupa A,
I termin**

Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i oznaczeniem grupy (A, B, ...). Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyższej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = cx \mathbb{1}_{\{x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 2\}}$. Obliczyć c , gęstość zmiennej X oraz $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq 1)$.

4. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym X i Y mają rozkład $N(1, 4)$, a Z ma rozkład $N(1, 2)$.

a) Wyznaczyć takie parametry a, b , by zmienne $aX + Y$ oraz bZ miały ten sam rozkład.

b) Obliczyć $\mathbb{E}\left(\frac{X+Y}{Z^2+1} \middle| Z+1\right)$.

c) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej (X, XY) .

5. Prawdopodobieństwo, że podróżny kupujący bilet na pociąg woli siedzieć w wagonie z przedziałami (odp. bez przedziałów) wynosi $3/4$ (odp. $1/4$). Bilety kupuje 400 podróżnych.

a) Bilet w wagonie bez przedziałów kosztuje 100 złotych, a w wagonie z przedziałami 110 złotych. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że kwota uzyskana ze sprzedaży biletów przekroczy 40800 złotych.

b) Przypuśćmy, że w pociągu jest 400 miejsc w wagonach z przedziałami i 100 miejsc w wagonach bezprzedziałowych. W razie braku miejsca preferowanego typu, podróżny wykupuje miejsce drugiego typu. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego, podać przybliżone prawdopodobieństwo, że każdy podróżny dostał miejsce zgodne ze swoją preferencją (tzn. w wagonie z przedziałami lub bez).

6. Naukowiec mający 3 parasole wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (prawdopodobieństwo $1/5$), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (prawdopodobieństwo $4/5$). Zakładamy, że każdego dnia naukowiec odwiedza biuro dokładnie raz. Stanem łańcucha Markowa jest liczba parasoli znajdujących się pod ręką, bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy.

a) Skonstruować macierz przejścia. b) Znaleźć rozkład stacjonarny. c) Znaleźć przybliżone prawdopodobieństwo zmoknięcia naukowca w drodze do pracy w danym, odległym dniu.

7. Średnia prędkość wiatru, mierzona w km/h, jest zmienną losową X o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Jeśli $X = x$, to ilość zużytej konwencjonalnej energii elektrycznej, oznaczona przez Y i mierzona w kWh, ma rozkład wykładniczy z parametrem x . Wyznaczyć rozkład zmiennej Y oraz obliczyć $\mathbb{E}(\frac{2}{X} + 1 | Y)$.

8. Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej, począwszy od 2020r., planuje dokonywać pomiaru wahań poziomu wody (mierzonych w centymetrach) w pewnej rzece w cyklu półrocznym. W n -tym roku pomiaru, przyrost wody w pierwszym półroczu jest zmienną losową X_n o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-30, 10]$, natomiast w drugim półroczu jest zmienną losową Y_n o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 20]$.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować z góry prawdopodobieństwo, że po 10 latach pomiarów poziom wody odchyli się od wyjściowego o więcej niż 40 cm.

b) Rozstrzygnąć, czy ciąg $\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny p.n. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, podać granicę.