Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 14.03.2014r.
Wersja I

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Aby uzyskać maksimum punktów, należy rozwiązać 7 wybranych zadań z 8. Każde zadanie oceniane jest na skali 0-10 pkt.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, należy oddać 8 kartek. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Klienci banku dzielą się na łatwowiernych (jest ich 90%) i sceptycznych (jest ich 10%). Jeśli klient jest łatwowierny, pracownikowi banku uda mu się go namówić do zakupu jednostek funduszu inwestycyjnego z prawdopodobieństwem 0,8; jeśli klient jest sceptyczny, z prawdopodobieństwem 0,9 nie zostanie przekonany do inwestycji. Na inwestycji można zarobić z prawdopodobieństwem 0,1, stracić z prawdopodobieństwem 0,8 i wyjść na zero z prawdopodobieństwem 0,1. Jeśli klient nie inwestuje, jego oszczędności pozostają bez zmian. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient banku straci (3 *pkt*). O panu X wiadomo, że nie stracił. Jaka jest szansa, że jest sceptyczny? (7 *pkt*)

2. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $g(x,y) = \frac{c}{x}1_{(1,3)}(x)$. Wyznaczyć stałą c (2 *pkt*), $\mathbb{P}(X \in (2,4))$ (2 *pkt*), rozkład zmiennej $-X^4$ (3 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(-X^4)$ (3 *pkt*).

3. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości $g(x,y) = 5x^2y1_{(-1,1)}(x)1_{(0,|x|)}(y)$. Wyznaczyć kowariancję zmiennych X i Y (7 *pkt*). Zbadać niezależność zmiennych X i Y (3 *pkt*).

4. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach (0,0), (1, 2) i (2,1), tj. o gęstości $g(x,y) = \frac{2}{3}(1_{[0,1]}(x)1_{[\frac{x}{2},2x]}(y) + 1_{(1,2]}(x)1_{[\frac{x}{2},3-x]}(y))$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (8 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$ (2 *pkt*).

5. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkłady wykładnicze z parametrami 2 i 4, odpowiednio. Niech $Z = XY$ a $T = X + Y - 1$. Wyznaczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Z i T, oraz współczynnik korelacji Z i T.

6. Agent handlowy sprzedaje zestawy garnków. Od odwiedzonych osób zawsze próbuje uzyskać namiary na kolejnych klientów. Liczba nowych adresów podawanych przez jedną osobę jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 2 i $\frac{1}{2}$. Agent namawia do zakupu średnio co czwartego odwiedzonego klienta.
   (a) W pewnym miesiącu agent zamierza odwiedzić 10 osób oraz wszystkie kontakty wskazane przez te 10 osób. Ile średnio zestawów garnków sprzeda? (5 *pkt*)
   (b) W kolejnym miesiącu agent zamierza odwiedzić n osób oraz wszystkie kontakty wskazane przez te n osób. Jakie powinno być n, żeby oczekiwana miesięczna sprzedaż wyniosła co najmniej 20 zestawów? (5 *pkt*)

7. W pewnym zakładzie hoduje się szczury do eksperymentów medycznych. Samica szczura rodzi w jednym miocie 4, 5, lub 10 młodych z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{10}$, odpowiednio. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 192 samice urodzą co najmniej 1020 młodych. (6 *pkt*) Samice rodzą 4 razy do roku, liczebności kolejnych miotów są niezależne. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 192 samice w ciągu roku urodzą łącznie co najwyżej 3960 młodych (4 *pkt*).

8. Minister finansów rzuca kostką by zdecydować, czy podnosi czy obniża podatki. Jeśli w danym roku podatki wzrosły, w kolejnym spadną jeśli na kostce wypadnie 5 lub 6 (i wzrosną w pozostałych przypadkach). Jeśli w danym roku podatki spadły, to w kolejnym roku również spadną o ile na kostce wypadnie 6 (i wzrosną w pozostałych przypadkach). W roku 2013 podatki wzrosły. Wyliczyć prawdopodobieństwo, że ciąg czterech następujących po sobie wzrostów podatków nastąpi zanim zanotujemy dwie kolejne obniżki (licząc od roku 2013 włącznie).

$\Phi(0,5) \approx 0,692$, $\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 14.03.2014r.

Wersja II

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Aby uzyskać maksimum punktów, należy rozwiązać 7 wybranych zadań z 8. Każde zadanie oceniane jest na skali 0-10 pkt.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, należy oddać 8 kartek. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Klienci banku dzielą się na łatwowiernych (jest ich 80%) i sceptycznych (jest ich 20%). Jeśli klient jest łatwowierny, pracownikowi banku uda mu się go namówić do zakupu jednostek funduszu inwestycyjnego z prawdopodobieństwem 0,9; jeśli klient jest sceptyczny, z prawdopodobieństwem 0,8 nie zostanie przekonany do inwestycji. Na inwestycji można zarobić z prawdopodobieństwem 0,1, stracić z prawdopodobieństwem 0,7 i wyjść na zero z prawdopodobieństwem 0,2. Jeśli klient nie inwestuje, jego oszczędności pozostają bez zmian. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient banku nie straci (3 *pkt*). O panu X wiadomo, że wyszedł na zero. Jaka jest szansa, że jest sceptyczny? (7 *pkt*)

2. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $g(x,y) = \frac{c}{x}1_{(1,4)}(x)$. Wyznaczyć stałą c (2 *pkt*), $\mathbb{P}(X \in (2,5))$ (2 *pkt*), rozkład zmiennej $-X^2$ (3 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(-X^2)$ (3 *pkt*).

3. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości $g(x,y) = 7xy^4 1_{(0,|y|)}(x)1_{(-1,1)}(y)$. Wyznaczyć kowariancję zmiennych X i Y (7 *pkt*). Zbadać niezależność zmiennych X i Y (3 *pkt*).

4. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach (0,0), (1, 3) i (3,1), tj. o gęstości $g(x,y) = \frac{1}{4}(1_{[0,1]}(x)1_{[\frac{x}{3},3x]}(y) + 1_{(1,3]}(x)1_{[\frac{x}{3},4-x]}(y))$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (8 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$ (2 *pkt*).

5. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkłady wykładnicze z parametrami 1 i 3, odpowiednio. Niech $Z = XY$ a $T = X + Y + 2$. Wyznaczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Z i T, oraz współczynnik korelacji Z i T.

6. Agent handlowy sprzedaje zestawy garnków. Od odwiedzonych osób zawsze próbuje uzyskać namiary na kolejnych klientów. Liczba nowych adresów podawanych przez jedną osobę jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 2 i $\frac{1}{4}$. Agent namawia do zakupu średnio co drugiego odwiedzonego klienta.
   (a) W pewnym miesiącu agent zamierza odwiedzić 12 osób oraz wszystkie kontakty wskazane przez te 12 osób. Ile średnio zestawów garnków sprzeda? (5 *pkt*)
   (b) W kolejnym miesiącu agent zamierza odwiedzić n osób oraz wszystkie kontakty wskazane przez te n osób. Jakie powinno być n, żeby oczekiwana miesięczna sprzedaż wyniosła co najmniej 30 zestawów? (5 *pkt*)

7. W pewnym zakładzie hoduje się szczury do eksperymentów medycznych. Samica szczura rodzi w jednym miocie 5, 6, lub 10 młodych z prawdopodobieństwami $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, odpowiednio. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 162 samice urodzą co najmniej 936 młodych. (6 *pkt*) Samice rodzą 4 razy do roku, liczebności kolejnych miotów są niezależne. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 162 samice w ciągu roku urodzą łącznie co najmniej 3906 młodych (4 *pkt*).

8. Minister finansów rzuca kostką by zdecydować, czy podnosi czy obniża podatki. Jeśli w danym roku podatki wzrosły, w kolejnym spadną jeśli na kostce wypadnie 1 lub 2 lub 3 (i wzrosną w pozostałych przypadkach). Jeśli w danym roku podatki spadły, to w kolejnym roku również spadną o ile na kostce wypadnie 1 lub 2 (i wzrosną w pozostałych przypadkach). W roku 2013 podatki spadły. Wyliczyć prawdopodobieństwo, że ciąg trzech następujących po sobie wzrostów podatków nastąpi zanim zanotujemy trzy kolejne obniżki (licząc od roku 2013 włącznie).

$\Phi(0,5) \approx 0,692$, $\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 14.03.2014r.

Wersja III

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Aby uzyskać maksimum punktów, należy rozwiązać 7 wybranych zadań z 8. Każde zadanie oceniane jest na skali 0-10 pkt.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, należy oddać 8 kartek. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Klienci banku dzielą się na łatwowiernych (jest ich 90%) i sceptycznych (jest ich 10%). Jeśli klient jest łatwowierny, pracownikowi banku uda mu się go namówić do zakupu jednostek funduszu inwestycyjnego z prawdopodobieństwem 0,8; jeśli klient jest sceptyczny, z prawdopodobieństwem 0,9 nie zostanie przekonany do inwestycji. Na inwestycji można zarobić z prawdopodobieństwem 0,1, stracić z prawdopodobieństwem 0,8 i wyjść na zero z prawdopodobieństwem 0,1. Jeśli klient nie inwestuje, jego oszczędności pozostają bez zmian. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient banku straci (3 *pkt*). O panu X wiadomo, że nie stracił. Jaka jest szansa, że jest sceptyczny? (7 *pkt*)

2. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $g(x,y) = \frac{c}{x} 1_{(1,3)}(x)$. Wyznaczyć stałą c (2 *pkt*), $\mathbb{P}(X \in (2,4))$ (2 *pkt*), rozkład zmiennej $-X^4$ (3 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(-X^4)$ (3 *pkt*).

3. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości $g(x,y) = 5x^2 y 1_{(-1,1)}(x) 1_{(0,|x|)}(y)$. Wyznaczyć kowariancję zmiennych X i Y (7 *pkt*). Zbadać niezależność zmiennych X i Y (3 *pkt*).

4. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach (0,0), (1, 2) i (2,1), tj. o gęstości $g(x,y) = \frac{2}{3}\left(1_{[0,1]}(x) 1_{[\frac{x}{2},2x]}(y) + 1_{(1,2]}(x) 1_{[\frac{x}{2},3-x]}(y)\right)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (8 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$ (2 *pkt*).

5. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkłady wykładnicze z parametrami 2 i 4, odpowiednio. Niech $Z = XY$ a $T = X + Y - 1$. Wyznaczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Z i T, oraz współczynnik korelacji Z i T.

6. Agent handlowy sprzedaje zestawy garnków. Od odwiedzonych osób zawsze próbuje uzyskać namiary na kolejnych klientów. Liczba nowych adresów podawanych przez jedną osobę jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 2 i $\frac{1}{2}$. Agent namawia do zakupu średnio co czwartego odwiedzonego klienta.
   (a) W pewnym miesiącu agent zamierza odwiedzić 10 osób oraz wszystkie kontakty wskazane przez te 10 osób. Ile średnio zestawów garnków sprzeda? (5 *pkt*)
   (b) W kolejnym miesiącu agent zamierza odwiedzić n osób oraz wszystkie kontakty wskazane przez te n osób. Jakie powinno być n, żeby oczekiwana miesięczna sprzedaż wyniosła co najmniej 20 zestawów? (5 *pkt*)

7. W pewnym zakładzie hoduje się szczury do eksperymentów medycznych. Samica szczura rodzi w jednym miocie 4, 5, lub 10 młodych z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{10}$, odpowiednio. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 192 samice urodzą co najmniej 1020 młodych. (6 *pkt*) Samice rodzą 4 razy do roku, liczebności kolejnych miotów są niezależne. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 192 samice w ciągu roku urodzą łącznie co najwyżej 3960 młodych (4 *pkt*).

8. Minister finansów rzuca kostką by zdecydować, czy podnosi czy obniża podatki. Jeśli w danym roku podatki wzrosły, w kolejnym spadną jeśli na kostce wypadnie 5 lub 6 (i wzrosną w pozostałych przypadkach). Jeśli w danym roku podatki spadły, to w kolejnym roku również spadną o ile na kostce wypadnie 6 (i wzrosną w pozostałych przypadkach). W roku 2013 podatki wzrosły. Wyliczyć prawdopodobieństwo, że ciąg czterech następujących po sobie wzrostów podatków nastąpi zanim zanotujemy dwie kolejne obniżki (licząc od roku 2013 włącznie).

$\Phi(0,5) \approx 0,692$, $\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 14.03.2014r.

Wersja IV

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Aby uzyskać maksimum punktów, należy rozwiązać 7 wybranych zadań z 8. Każde zadanie oceniane jest na skali 0-10 pkt.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, należy oddać 8 kartek. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I”.
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Klienci banku dzielą się na łatwowiernych (jest ich 80%) i sceptycznych (jest ich 20%). Jeśli klient jest łatwowierny, pracownikowi banku uda mu się go namówić do zakupu jednostek funduszu inwestycyjnego z prawdopodobieństwem 0,9; jeśli klient jest sceptyczny, z prawdopodobieństwem 0,8 nie zostanie przekonany do inwestycji. Na inwestycji można zarobić z prawdopodobieństwem 0,1, stracić z prawdopodobieństwem 0,7 i wyjść na zero z prawdopodobieństwem 0,2. Jeśli klient nie inwestuje, jego oszczędności pozostają bez zmian. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient banku nie straci (3 *pkt*). O panu X wiadomo, że wyszedł na zero. Jaka jest szansa, że jest sceptyczny? (7 *pkt*)

2. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $g(x,y) = \frac{c}{x}1_{(1,4)}(x)$. Wyznaczyć stałą c (2 *pkt*), $\mathbb{P}(X \in (2,5))$ (2 *pkt*), rozkład zmiennej $-X^2$ (3 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(-X^2)$ (3 *pkt*).

3. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości $g(x,y) = 7xy^4 1_{(0,|y|)}(x)1_{(-1,1)}(y)$. Wyznaczyć kowariancję zmiennych X i Y (7 *pkt*). Zbadać niezależność zmiennych X i Y (3 *pkt*).

4. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach (0,0), (1, 3) i (3,1), tj. o gęstości $g(x,y) = \frac{1}{4}(1_{[0,1]}(x)1_{[\frac{x}{3},3x]}(y) + 1_{(1,3]}(x)1_{[\frac{x}{3},4-x]}(y))$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (8 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$ (2 *pkt*).

5. Niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkłady wykładnicze z parametrami 1 i 3, odpowiednio. Niech $Z = XY$ a $T = X + Y + 2$. Wyznaczyć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych Z i T, oraz współczynnik korelacji Z i T.

6. Agent handlowy sprzedaje zestawy garnków. Od odwiedzonych osób zawsze próbuje uzyskać namiary na kolejnych klientów. Liczba nowych adresów podawanych przez jedną osobę jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 2 i $\frac{1}{4}$. Agent namawia do zakupu średnio co drugiego odwiedzonego klienta.
   (a) W pewnym miesiącu agent zamierza odwiedzić 12 osób oraz wszystkie kontakty wskazane przez te 12 osób. Ile średnio zestawów garnków sprzeda? (5 *pkt*)
   (b) W kolejnym miesiącu agent zamierza odwiedzić n osób oraz wszystkie kontakty wskazane przez te n osób. Jakie powinno być n, żeby oczekiwana miesięczna sprzedaż wyniosła co najmniej 30 zestawów? (5 *pkt*)

7. W pewnym zakładzie hoduje się szczury do eksperymentów medycznych. Samica szczura rodzi w jednym miocie 5, 6, lub 10 młodych z prawdopodobieństwami $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, odpowiednio. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 162 samice urodzą co najmniej 936 młodych. (6 *pkt*) Samice rodzą 4 razy do roku, liczebności kolejnych miotów są niezależne. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że 162 samice w ciągu roku urodzą łącznie co najmniej 3906 młodych (4 *pkt*).

8. Minister finansów rzuca kostką by zdecydować, czy podnosi czy obniża podatki. Jeśli w danym roku podatki wzrosły, w kolejnym spadną jeśli na kostce wypadnie 1 lub 2 lub 3 (i wzrosną w pozostałych przypadkach). Jeśli w danym roku podatki spadły, to w kolejnym roku również spadną o ile na kostce wypadnie 1 lub 2 (i wzrosną w pozostałych przypadkach). W roku 2013 podatki spadły. Wyliczyć prawdopodobieństwo, że ciąg trzech następujących po sobie wzrostów podatków nastąpi zanim zanotujemy trzy kolejne obniżki (licząc od roku 2013 włącznie).

$\Phi(0,5) \approx 0,692$, $\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$