

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 8 lutego 2019r., grupa A

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych sześciu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0–10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. **Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D.** Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 60x^2y\mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 2y \leq 1\}}$. Obliczyć gęstość zmiennej Y , $\text{Cov}(X, Y^2)$ oraz $\mathbb{E}(2XY - 5Y^2 + 1|Y)$.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 4.

a) Wyznaczyć macierz kowariancji dwuwymiarowej zmiennej $(X - 3, X + Y)$.

b) Ile wynosi $\mathbb{P}(X + Y \leq 2) + \mathbb{E}XY$? Odpowiedź uzasadnić.

c) Rozstrzygnąć, czy zmienne $-5X + 12$ oraz $3X + 4Y$ mają ten sam rozkład.

3. Użytkownik pobiera pewną liczbę plików z internetu. Czas potrzebny na pobranie pojedynczego pliku (mierzony w minutach) jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 20]$, zależącą tylko od ściąganego pliku. W przypadku gdy czas pobierania jest dłuższy niż 19 minut, serwer przerywa połączenie i przechodzi do kolejnego pliku z listy.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować prawdopodobieństwo, że przy pobieraniu 40 plików z sieci, serwer nie przerwie połączenia ani razu lub przerwie je co najmniej 4 razy.

b) Niech X_n oznacza czas poświęcony na pobieranie n -tego pliku z listy (przyjmujemy $X_n = 19$ jeśli serwer przerwie połączenie). Wyznaczyć granicę, w sensie zbieżności prawie na pewno, ciągu

$$\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2}{5n^2 + 1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Meteorolog bada dynamikę atmosfery nad Sycylią w miesiącu lipcu. Niech X oznacza łączną ilość opadów (w litrach na metr kwadratowy), a Y będzie średnią wysokością temperatury (w stopniach Celsjusza). Z danych historycznych wynika, iż zmienna Y ma rozkład jednostajny na przedziale $[20, 30]$; ponadto, jeśli $Y = y$, to zmienna X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, y/10]$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość opadów w lipcu przyszłego roku nie przekroczy $\frac{1}{2}$ litra/m².

b) Obliczyć średnią wysokość temperatury przy założeniu, że ilość opadów wyniesie $\frac{1}{2}$ litra/m².

5. Bank przewiduje, iż w dniu 11 lutego do okienka kasowego zgłosi się 100 osób z zamiarem wypłacenia gotówki. Każda z tych osób będzie chciała wypłacić pieniądze w złotych, dolarach albo euro (prawdopodobieństwa wyboru poszczególnych walut wynoszą $3/5$, $1/5$ i $1/5$, odpowiednio).

a) Korzystając z twierdzenia de Moivre’a-Laplace’a lub Centralnego Twierdzenia Granicznego obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że liczba osób zainteresowanych wypłatą złotych bądź euro będzie o co najmniej 62 większa niż liczba osób zainteresowanych wypłatą dolarów.

b) Załóżmy, że pojedyncza wypłata w złotych (liczona w tysiącach złotych) ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że sumaryczna wypłata w złotych w dniu 11 lutego przekroczy 65 tysięcy.

Wskazówka do b): wypłatę w złotych każdej spośród 100 osób można zapisać jako $X \cdot Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X \sim \text{Exp}(1)$ oraz $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{5}$.

6. Pan Kowalski trzyma na półce dwie książki wypożyczone z biblioteki. W każdy poniedziałek wybiera losowo jedną z nich i czyta ją w ciągu tygodnia; następnie oddaje ją w sobotę do biblioteki i wypożycza losowo nową książkę, którą odkłada na półkę. Nowo wypożyczona książka może być „cienka” (< 100 stron) lub „gruba” (≥ 100 stron) - odpowiadające prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{3}{5}$ oraz $\frac{2}{5}$. W poniedziałek 4 lutego 2019 r. na półce znalazły się dwie grube książki.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że 18 lutego 2019 r. na półce znajdą się dwie grube książki?

b) Po ilu średnio tygodniach na półce po raz pierwszy pojawią się dwie cienkie książki?

c) Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 100 tygodniach na półce znajdzie się jedna gruba i jedna cienka książka?

Wskazówka: pojedynczy stan odpowiadającego łańcucha Markowa można opisać podając rodzaje książek na półce na początku tygodnia, np. CC (dwie cienkie), CG (jedna cienka, jedna gruba), itp.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 8 lutego 2019r., grupa B

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych sześciu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0–10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. **Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D.** Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybucją. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 60xy^2 \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq 2x \leq 1\}}$. Obliczyć gęstość zmiennej X , $\text{Cov}(X^2, Y)$ oraz $\mathbb{E}(2XY - 5X^2 + 1|X)$.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład normalny o średniej -1 i wariancji 3 .

a) Wyznaczyć macierz kowariancji dwuwymiarowej zmiennej $(X + 3, 2X - Y)$.

b) Ile wynosi $\mathbb{P}(X + Y \geq -2) + \mathbb{E}XY$? Odpowiedź uzasadnić.

c) Rozstrzygnąć, czy zmienne $5X - 2$ oraz $4X + 3Y$ mają ten sam rozkład.

3. Użytkownik pobiera pewną liczbę plików z internetu. Czas potrzebny na pobranie pojedynczego pliku (mierzony w minutach) jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 30]$, zależącą tylko od ściąganego pliku. W przypadku gdy czas pobierania jest dłuższy niż 29 minut, serwer przerywa połączenie i przechodzi do kolejnego pliku z listy.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować prawdopodobieństwo, że przy pobieraniu 60 plików z sieci, serwer nie przerwie połączenia ani razu lub przerwie je co najmniej 4 razy.

b) Niech X_n oznacza czas poświęcony na pobieranie n -tego pliku z listy (przyjmujemy $X_n = 29$ jeśli serwer przerwie połączenie). Wyznaczyć granicę, w sensie zbieżności prawie na pewno, ciągu

$$\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2}{3n^2 - 2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Meteorolog bada dynamikę atmosfery nad Sycylią w miesiącu lipcu. Niech X oznacza łączną ilość opadów (w litrach na metr kwadratowy), a Y będzie średnią wysokością temperatury (w stopniach Celsjusza). Z danych historycznych wynika, iż zmienna Y ma rozkład jednostajny na przedziale $[20, 40]$; ponadto, jeśli $Y = y$, to zmienna X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, y/10]$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość opadów w lipcu przyszłego roku nie przekroczy 1 litra/m².

b) Obliczyć średnią wysokość temperatury przy założeniu, że ilość opadów wyniesie 1 litr/m².

5. Bank przewiduje, iż w dniu 11 lutego do okienka kasowego zgłosi się 160 osób z zamiarem wypłacenia gotówki. Każda z tych osób będzie chciała wypłacić pieniądze w złotych, dolarach albo euro (prawdopodobieństwa wyboru poszczególnych walut wynoszą $2/5$, $2/5$ i $1/5$, odpowiednio).

a) Korzystając z twierdzenia de Moivre’a-Laplace’a lub Centralnego Twierdzenia Granicznego obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że liczba osób zainteresowanych wypłatą złotych bądź euro będzie o co najmniej 100 większa niż liczba osób zainteresowanych wypłatą dolarów.

b) Załóżmy, że pojedyncza wypłata w złotych (liczona w tysiącach złotych) ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że sumaryczna wypłata w złotych w dniu 11 lutego przekroczy 30 tysięcy.

Wskazówka do b): wypłatę w złotych każdej spośród 160 osób można zapisać jako $X \cdot Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X \sim \text{Exp}(2)$ oraz $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{3}{5}$.

6. Pan Kowalski trzyma na półce dwie książki wypożyczone z biblioteki. W każdy poniedziałek wybiera losowo jedną z nich i czyta ją w ciągu tygodnia; następnie oddaje ją w sobotę do biblioteki i wypożycza losowo nową książkę, którą odkłada na półkę. Nowo wypożyczona książka może być „cienka” (< 100 stron) lub „gruba” (≥ 100 stron) - odpowiadające prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{2}{5}$ oraz $\frac{3}{5}$. W poniedziałek 4 lutego 2019 r. na półce znalazły się dwie cienkie książki.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że 18 lutego 2019 r. na półce znajdą się dwie cienkie książki?

b) Po ilu średnio tygodniach na półce po raz pierwszy pojawią się dwie grube książki?

c) Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 100 tygodniach na półce znajdzie się jedna gruba i jedna cienka książka?

Wskazówka: pojedynczy stan odpowiadającego łańcucha Markowa można opisać podając rodzaje książek na półce na początku tygodnia, np. CC (dwie cienkie), CG (jedna cienka, jedna gruba), itp.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 8 lutego 2019r., grupa C

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych sześciu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0–10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. **Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D.** Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybucją. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 80xy^2 \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 2y \leq 1\}}$. Obliczyć gęstość zmiennej Y , $\text{Cov}(X, Y^2)$ oraz $\mathbb{E}(-3XY + 2Y^2 - 10|Y)$.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład normalny o średniej -2 i wariancji 2 .

a) Wyznaczyć macierz kowariancji dwuwymiarowej zmiennej $(2X - 1, X - Y)$.

b) Ile wynosi $\mathbb{P}(X + Y \leq -4) - \mathbb{E}XY$? Odpowiedź uzasadnić.

c) Rozstrzygnąć, czy zmienne $-5X - 12$ oraz $-3X + 4Y$ mają ten sam rozkład.

3. Użytkownik pobiera pewną liczbę plików z internetu. Czas potrzebny na pobranie pojedynczego pliku (mierzony w minutach) jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 30]$, zależącą tylko od ściąganego pliku. W przypadku gdy czas pobierania jest dłuższy niż 28 minut, serwer przerywa połączenie i przechodzi do kolejnego pliku z listy.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować prawdopodobieństwo, że przy pobieraniu 30 plików z sieci, serwer nie przerwie połączenia ani razu lub przerwie je co najmniej 4 razy.

b) Niech X_n oznacza czas poświęcony na pobieranie n -tego pliku z listy (przyjmujemy $X_n = 28$ jeśli serwer przerwie połączenie). Wyznaczyć granicę, w sensie zbieżności prawie na pewno, ciągu

$$\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2}{4n^2 - 3n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Meteorolog bada dynamikę atmosfery nad Sycylią w miesiącu lipcu. Niech X oznacza łączną ilość opadów (w litrach na metr kwadratowy), a Y będzie średnią wysokością temperatury (w stopniach Celsjusza). Z danych historycznych wynika, iż zmienna Y ma rozkład jednostajny na przedziale $[30, 40]$; ponadto, jeśli $Y = y$, to zmienna X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, y/10]$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość opadów w lipcu przyszłego roku nie przekroczy 2 litrów/m².

b) Obliczyć średnią wysokość temperatury przy założeniu, że ilość opadów wyniesie 2 litry/m².

5. Bank przewiduje, iż w dniu 11 lutego do okienka kasowego zgłosi się 100 osób z zamiarem wypłacenia gotówki. Każda z tych osób będzie chciała wypłacić pieniądze w złotych, dolarach albo euro (prawdopodobieństwa wyboru poszczególnych walut wynoszą $2/5$, $1/5$ i $2/5$, odpowiednio).

a) Korzystając z twierdzenia de Moivre’a-Laplace’a lub Centralnego Twierdzenia Granicznego obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że liczba osób zainteresowanych wypłatą złotych bądź euro będzie o co najmniej 22 większa niż liczba osób zainteresowanych wypłatą dolarów.

b) Załóżmy, że pojedyncza wypłata w złotych (liczona w tysiącach złotych) ma rozkład wykładniczy z parametrem $1/2$. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że sumaryczna wypłata w złotych w dniu 11 lutego przekroczy 78 tysięcy.

Wskazówka do b): wypłatę w złotych każdej spośród 100 osób można zapisać jako $X \cdot Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$ oraz $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{3}{5}$.

6. Pan Kowalski trzyma na półce dwie książki wypożyczone z biblioteki. W każdy poniedziałek wybiera losowo jedną z nich i czyta ją w ciągu tygodnia; następnie oddaje ją w sobotę do biblioteki i wypożycza losowo nową książkę, którą odkłada na półkę. Nowo wypożyczona książka może być „cienka” (< 100 stron) lub „gruba” (≥ 100 stron) - odpowiadające prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{4}{5}$ oraz $\frac{1}{5}$. W poniedziałek 4 lutego 2019 r. na półce znalazły się dwie grube książki.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że 18 lutego 2019 r. na półce znajdą się dwie grube książki?

b) Po ilu średnio tygodniach na półce po raz pierwszy pojawią się dwie cienkie książki?

c) Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 100 tygodniach na półce znajdzie się jedna gruba i jedna cienka książka?

Wskazówka: pojedynczy stan odpowiadającego łańcucha Markowa można opisać podając rodzaje książek na półce na początku tygodnia, np. CC (dwie cienkie), CG (jedna cienka, jedna gruba), itp.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 8 lutego 2019r., grupa D

Aby uzyskać maksymalną liczbę punktów, z poniższych sześciu zadań należy zrobić pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0–10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. **Proszę na każdej kartce umieścić także oznaczenie grupy: A, B, C lub D.** Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybucją. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 80x^2y\mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq 2x \leq 1\}}$. Obliczyć gęstość zmiennej X , $\text{Cov}(X^2, Y)$ oraz $\mathbb{E}(-3XY + 2X^2 - 10|X)$.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład normalny o średniej 3 i wariancji 2.

a) Wyznaczyć macierz kowariancji dwuwymiarowej zmiennej $(X + 4, -X + Y)$.

b) Ile wynosi $\mathbb{P}(X + Y \geq 6) - \mathbb{E}XY$? Odpowiedź uzasadnić.

c) Rozstrzygnąć, czy zmienne $5X - 12$ oraz $4X - 3Y$ mają ten sam rozkład.

3. Użytkownik pobiera pewną liczbę plików z internetu. Czas potrzebny na pobranie pojedynczego pliku (mierzony w minutach) jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 20]$, zależącą tylko od ściąganego pliku. W przypadku gdy czas pobierania jest dłuższy niż 18 minut, serwer przerywa połączenie i przechodzi do kolejnego pliku z listy.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować prawdopodobieństwo, że przy pobieraniu 20 plików z sieci, serwer nie przerwie połączenia ani razu lub przerwie je co najmniej 4 razy.

b) Niech X_n oznacza czas poświęcony na pobieranie n -tego pliku z listy (przyjmujemy $X_n = 18$ jeśli serwer przerwie połączenie). Wyznaczyć granicę, w sensie zbieżności prawie na pewno, ciągu

$$\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2}{n^2 + 4n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Meteorolog bada dynamikę atmosfery nad Sycylią w miesiącu lipcu. Niech X oznacza łączną ilość opadów (w litrach na metr kwadratowy), a Y będzie średnią wysokością temperatury (w stopniach Celsjusza). Z danych historycznych wynika, iż zmienna Y ma rozkład jednostajny na przedziale $[30, 40]$; ponadto, jeśli $Y = y$, to zmienna X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, y/20]$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość opadów w lipcu przyszłego roku nie przekroczy 1 litra/m².

b) Obliczyć średnią wysokość temperatury przy założeniu, że ilość opadów wyniesie 1 litr/m².

5. Bank przewiduje, iż w dniu 11 lutego do okienka kasowego zgłosi się 160 osób z zamiarem wypłacenia gotówki. Każda z tych osób będzie chciała wypłacić pieniądze w złotych, dolarach albo euro (prawdopodobieństwa wyboru poszczególnych walut wynoszą 1/5, 3/5 i 1/5, odpowiednio).

a) Korzystając z twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a lub Centralnego Twierdzenia Granicznego obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że liczba osób zainteresowanych wypłatą złotych bądź euro będzie o co najmniej 90 większa niż liczba osób zainteresowanych wypłatą dolarów.

b) Załóżmy, że pojedyncza wypłata w złotych (liczona w tysiącach złotych) ma rozkład wykładniczy z parametrem 1/3. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że sumaryczna wypłata w złotych w dniu 11 lutego przekroczy 90 tysięcy.

Wskazówka do b): wypłatę w złotych każdej spośród 160 osób można zapisać jako $X \cdot Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{3})$ oraz $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{4}{5}$.

6. Pan Kowalski trzyma na półce dwie książki wypożyczone z biblioteki. W każdy poniedziałek wybiera losowo jedną z nich i czyta ją w ciągu tygodnia; następnie oddaje ją w sobotę do biblioteki i wypożycza losowo nową książkę, którą odkłada na półkę. Nowo wypożyczona książka może być „cienka” (< 100 stron) lub „gruba” (≥ 100 stron) - odpowiadające prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{1}{5}$ oraz $\frac{4}{5}$. W poniedziałek 4 lutego 2019 r. na półce znalazły się dwie cienkie książki.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że 18 lutego 2019 r. na półce znajdą się dwie cienkie książki?

b) Po ilu średnio tygodniach na półce po raz pierwszy pojawią się dwie grube książki?

c) Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 100 tygodniach na półce znajdzie się jedna gruba i jedna cienka książka?

Wskazówka: pojedynczy stan odpowiadającego łańcucha Markowa można opisać podając rodzaje książek na półce na początku tygodnia, np. CC (dwie cienkie), CG (jedna cienka, jedna gruba), itp.