

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład XIV, 15.01.2019

ŁAŃCUCHY MARKOWA

Plan na dzisiaj

- ☐ CTG, przykłady – dokończenie
- ☐ Łańcuchy Markowa



Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG) – przypomnienie

1. Twierdzenie (CTG):

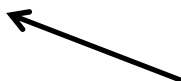
Założmy, że $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, takim, że $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$.

Oznaczmy $m = \mathbb{E}X_1$, $\sigma^2 = \text{Var } X_1$.

Wówczas dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \leq t \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(t).$$

dystrybuanta
rozkładu
normalnego
standardowego



2. Dodatkowe własności:

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \geq s \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \Phi(s), \text{ oraz}$$

$$\mathbb{P} \left(s \leq \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \leq t \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(t) - \Phi(s).$$

Centralne twierdzenie graniczne – przykłady

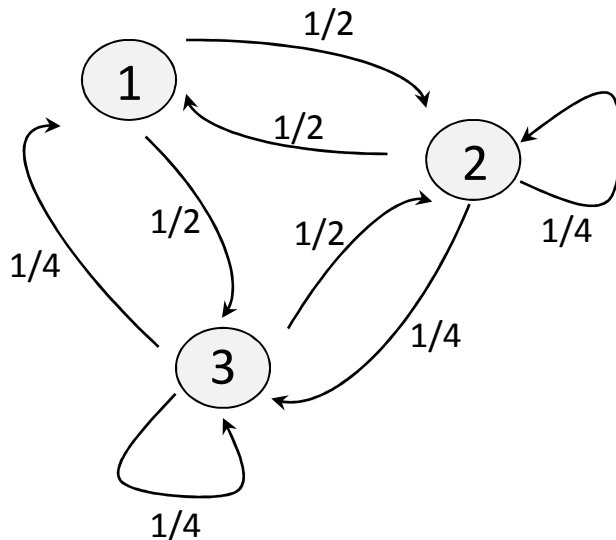
- Ilu studentów przyjąć?
- Sumowanie błędów
- Przedziały ufności



Łańcuchy Markowa

Przykład opisu:

- 3 stany, prawdopodobieństwa zmian między stanami opisane przy pomocy macierzy lub grafu



$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



Łańcuchy Markowa: definicje

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ o wartościach w skończonym zbiorze E (tzw. przestrzeni stanów) nazwiemy **łańcuchem Markowa**, jeśli dla dowolnego $n = 1, 2, 3, \dots$ oraz dla dowolnego ciągu $x_0, x_1, \dots, x_n$ elementów zbioru E zachodzi równość

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) = \\ = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}),\end{aligned}$$

o ile tylko $\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) > 0$.

Jeśli dla dowolnych $i, j \in E$, $\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i)$ nie zależy od n , łańcuch nazywamy **jednorodnym** lub **jednorodnym w czasie**. W takiej sytuacji definiujemy macierz przejścia łańcucha $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ wzorem

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

Liczby p_{ij} nazywamy **prawdopodobieństwami przejścia**.

Łańcuchy Markowa – cd.

- ☐ Własności:
 - suma wiersza=1
 - suma kolumny NIEKONIECZNIE=1
 - ☐ ogólniej: macierz przejścia w n-tym kroku
 - ☐ ogólniej: dla nieskończonej przestrzeni stanów podobnie
 - ☐ modelowanie zależności od dwóch okresów
-



Łańcuchy Markowa – cd (2).

Rozkłady:

*Jeżeli $X_0, X_1, X_2, \dots$ jest łańcuchem Markowa na E , to rozkład zmiennej X_0 (tj. wektor $Q = (Q_i)_{i \in E}$) nazywamy **rozkładem początkowym** łańcucha.*

Twierdzenie:

Jeśli $X_0, X_1, X_2, \dots$ jest łańcuchem Markowa o rozkładzie początkowym Q i macierzy przejścia P , to zmienna X_n ma rozkład QP^n .

Czyli, dla dowolnego $j \in E$ zachodzi

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i_0 \in E} \sum_{i_1 \in E} \cdots \sum_{i_{n-1} \in E} Q_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j}.$$

Podobnie

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{i_1 \in E} \cdots \sum_{i_{n-1} \in E} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} j},$$

a zatem tzw. macierz przejścia w n krokach jest równa P^n .



Łańcuchy Markowa – cd (2).

Dalsze definicje:

Łańcuch Markowa jest **nieprzywiedlny**, jeśli dla dowolnych $i, j \in E$ istnieje $n > 0$, takie że $p_{ij}(n) > 0$.

Okresem $o(j)$ stanu j nazywamy największy wspólny dzielnik liczb ze zbioru $\{n: p_{ii}(n) > 0\}$.

Stan j nazywamy **okresowym** jeśli $o(j) > 1$,
i **nieokresowym** jeśli $o(j) = 1$.

Twierdzenie:

W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.



Łańcuchy Markowa – cd (3).

Definicje cd.

Nieprzywiedlny łańcuch Markowa, w którym wszystkie stany mają okres 1 nazywamy łańcuchem nieokresowym, w przeciwnym wypadku łańcuch nazywamy okresowym.

*Rozkład prawdopodobieństwa π na E (reprezentowany jako wektor $(\pi_i)_{i \in E}$) nazwiemy **rozkładem stacjonarnym** łańcucha Markowa, jeśli*
$$\pi P = \pi,$$
gdzie P oznacza macierz przejścia łańcucha.

wyznaczanie rozkładu stacjonarnego: układ równań



Łańcuchy Markowa – cd (4).

Twierdzenie Ergodyczne

Rozważmy nieprzywiedlny, nieokresowy łańcuch Markowa na skończonej przestrzeni stanów. Wówczas łańcuch ten ma dokładnie jeden rozkład stacjonarny π . Co więcej, dla dowolnych $i, j \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j > 0$.

Uwagi:

- granica nie zależy od i ! (tzn. granica nie zależy od tego, jaki był stan początkowy)
- opisuje, co się (średnio) dzieje w przyszłości

Słownik wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych Kopalińskiego:

ergodyczny: odnoszący się do procesu, którego każdy kolejny odcinek jest statystycznie taki sam i dlatego jednakowo reprezentatywny dla całości.



Łańcuchy Markowa – cd. (5)

Średni czas dojścia ze stanu i do stanu j dla nieprzywiedlnego łańcucha Markowa to wartość oczekiwana liczby kroków po których Łańcuch Markowa znajdzie się po raz pierwszy w stanie i , jeśli startuje ze stanu j . Oznaczane m_{ij} .

Konwencja: $m_{ii} = 0$.

Średni czas powrotu dla stanu i dla nieprzywiedlnego łańcucha Markowa to wartość oczekiwana liczby kroków, po których łańcuch Markowa powróci po raz pierwszy do stanu i , oznaczane m_i .

Obliczenia: układy równań

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj} \qquad m_i = 1 + \sum_k p_{ik} m_{ki}$$



Łańcuchy Markowa – cd. (6)

Twierdzenie

Niech $(X_n)_{n \geq 0}$ będzie nieprzywiedlnym łańcuchem Markowa dla skończonej przestrzeni stanów. Wówczas rozkład stacjonarny π spełnia warunek

$$\pi_j = \frac{1}{m_j},$$

gdzie m_j jest średnim czasem powrotu dla stanu j .



Łańcuchy Markowa – cd (7).

Stan e nazwiemy pochłaniającym, jeżeli z faktu, że dla pewnego $n \geq 0$ mamy $X_n = e$ wynika, że dla wszystkich $k > n$ mamy $X_k = e$.

Przykładowe problemy:

- prawdopodobieństwo, że łańcuch znajdzie się w konkretnym stanie pochłaniającym
- średni czas dojścia do stanu pochłaniającego





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences