

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład VIII, 20.11.2018

ROZKŁADY JEDNOWYMIAROWE- dokończenie

ROZKŁADY WIELOWYMIAROWE

Plan na dzisiaj

14. Momenty

15. Charakterystyki liczbowe próbki

16. Wielowymiarowe zmienne losowe

- rozkład łączny, rozkłady brzegowe
- wektory ciągłe i dyskretne
- wartości oczekiwane funkcji zm. los.
- kowariancja, korelacja
- wartość oczekiwana wektora losowego



14.3 Momenty – przypomnienie

1. Definicja momentu absolutnego

Dla $p \in (0, \infty)$, momentem (absolutnym) rzędu p zmiennej X nazywamy liczbę $\mathbb{E}|X|^p$, o ile wartość oczekiwana jest skończona (w przeciwnym razie przyjmujemy, że moment jest nieskończony).

2. Definicja momentu zwykłego

Dla $p \in (0, \infty)$, momentem zwykłym rzędu p zmiennej X nazywamy liczbę $\mathbb{E}X^p$, o ile wartość oczekiwana jest skończona.

3. Definicja momentu centralnego

Dla $p \in (0, \infty)$, momentem centralnym rzędu p zmiennej X nazywamy liczbę $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^p$,

 *o ile wartość oczekiwana jest skończona.*

ma zawsze
sens dla p
naturalnych

14.3 Parametry rozkładów – cd.

4. Definicja współczynnika asymetrii

Założmy, że $\mathbb{E}|X|^3 < \infty$. Współczynnikiem asymetrii (skośności) zmiennej X nazywamy liczbę

$$\alpha_3 = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^3}{(D^2 X)^{3/2}} = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^3}{\sigma_X^3}.$$

5. Definicja kurtozy

Założmy, że $\mathbb{E}|X|^4 < \infty$. Kurtozą (współczynnikiem spłaszczenia) zmiennej X nazywamy liczbę

$$\alpha_4 = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^4}{\sigma_X^4} - 3.$$

6. Przykłady (rozkład normalny)



15. Charakterystyki liczbowe próbki

1. W *rzeczywistości* zamiast zmiennych losowych mamy tylko skończone próbki
2. Z każdą próbką związany jest rozkład empiryczny

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie ciągiem zmiennych losowych o nieznanym rozkładzie. **Rozkładem empirycznym** tej próbki nazwiemy rozkład

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}(A) = \frac{|\{i \leq n : X_i \in A\}|}{n},$$

- dla dużych n dobre przybliżenie nieznanego rozkładu!



15. Charakterystyki liczbowe próbki – cd.

3. Definicja dystrybuanty empirycznej

Dystrybuantą empiryczną próbki $X_1, X_2, \dots, X_n$ nazywamy funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, zadaną wzorem

$$F_n(t) = \mu_n((-\infty, t]) = \frac{|\{i \leq n: X_i \leq t\}|}{n}.$$

jest to dystrybuanta rozkładu empirycznego

4. Definicja kwantyla z próbki

Kwantylem rzędu p z próbki $X_1, \dots, X_n$ nazywamy dowolną liczbę x_p , taką że

$$\mu_n((-\infty, x_p]) \geq p$$

$$\mu_n([x_p, \infty)) \geq 1 - p.$$

jeśli niejednoznaczny, to często min.



15. Charakterystyki liczbowe próbki – cd (2).

5. Definicja średniej z próbki

Średnią z próbki $X_1, X_2, \dots, X_n$
nazywamy liczbę $m = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

6. Definicja wariancji z próbki

Wariancją z próbki

$X_1, X_2, \dots, X_n$ nazywamy liczbę

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2,$$

gdzie m jest średnią z próbki.



16. Rozkład łączny zmiennych losowych

1. Wektor losowy – zmienna losowa w przestrzeni n -wymiarowej: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$
2. Definicja rozkładu wektora losowego

Rozkładem wektora losowego $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazywamy prawdopodobieństwo μ_X na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, dane wzorem $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

inaczej **rozkład łączny**

3. Rozkłady brzegowe – rozkłady poszczególnych zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_n$



16. Rozkład łączny zmiennych losowych – cd.

4. Wyliczenie rozkładu jednej zmiennej:

Chcąc obliczyć $\mu_{X_i}(B) = \mathbb{P}(X_i \in B)$ dla $B \subseteq \mathbb{R}$, definiujemy

$$A = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{i-1} \times B \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n-i}$$

i korzystamy z równości

$$\mathbb{P}(X_i \in B) = \mathbb{P}((X_1, X_2, \dots, X_n) \in A) = \mu_X(A).$$

5. Przykład: dwukrotny rzut monetą i modyfikacja jednej ze zmiennych

6. Dystrybuanta wektora losowego

Dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y)

nazywamy funkcję $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ daną wzorem

$$F_{(X,Y)}(s, t) = \mathbb{P}(X \leq s, Y \leq t).$$



Koniec zakresu materiału do kolokwium

piątek 7 grudnia 2018 r., godz. 18:30



WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences

16. Rozkład łączny zmiennych losowych – cd (2)

7. Definicja wektora dyskretnego

*Wektor losowy (X, Y) nazwiemy **dyskretnym**,
jeśli istnieje przeliczalny zbiór $S \subseteq \mathbb{R}^2$,
taki że $\mu_{(X,Y)}(S) = 1$.*

rozkłady brzegowe też są dyskretne, sumowanie

8. Definicja wektora ciągłego

*Wektor losowy (X, Y) nazwiemy **ciągłym**,
jeśli istnieje gęstość, czyli funkcja $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$,
taka że dla każdego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$,
 $\mu_{(X,Y)}(A) = \iint_A g(x, y) dx dy$.*

9. Przykłady



16. Rozkład łączny zmiennych losowych – cd (3)

10. Twierdzenie 20

Założmy, że (X, Y) ma rozkład z gęstością g . Wówczas rozkłady brzegowe zmiennych X oraz Y także są ciągłe, co więcej, odpowiednie gęstości wynoszą

$$g_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) dy, \quad g_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) dx.$$

Ogólniej, jeśli n -wymiarowy wektor ma gęstość g , to jego k -ta współrzędna ma rozkład z gęstością g_k , którą uzyskujemy odcałkowując g po wszystkich zmiennych różnych niż x_k :

$$g_k(x_k) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n.$$

łatwo wyliczyć parametry poszczególnych rozkładów brzegowych
w odwrotną stronę nie zachodzi!



16. Rozkład łączny zmiennych losowych – cd (4)

11. Twierdzenie 21

(i) *Jeśli (X, Y) jest dyskretną zmienną losową skoncentrowaną na zbiorze S i $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, to*
$$\mathbb{E}\phi(X, Y) = \sum_{(x, y) \in S} \phi(x, y) \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$$
(o ile wartość oczekiwana istnieje).

(ii) *Jeśli (X, Y) jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym (z gęstością g) i $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, to*
$$\mathbb{E}\phi(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y) g(x, y) dx dy$$
(o ile wartość oczekiwana istnieje).

12. Przykłady



16. Rozkład łączny zmiennych losowych – cd(2)

13. Kowariancja, korelacja

Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową, taką że X, Y są całkowalnymi zmiennymi losowymi, i taką, że $\mathbb{E}|XY| < \infty$. Kowariancją zmiennych X, Y nazywamy liczbę

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y).$$

Jeśli dodatkowo $\text{Var}X, \text{Var}Y > 0$, definiujemy współczynnik korelacji liniowej zmiennych X, Y , jako

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}X \cdot \text{Var}Y}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$



16. Rozkład łączny zmiennych losowych – cd(3)

14. Własności kowariancji i korelacji:

- stałe względem przesunięć
- dwuliniowość kowariancji
- przydatny wzór

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$$

- wariancja jako kowariancja
- „łapie” liniową zależność
- kowariancja wrażliwa na skalę,
współczynnik korelacji nie:



16. Rozkład łączny zmiennych losowych – cd(4)

15. Ograniczenie współczynnika korelacji:

Nierówność Schwarza:

Niech $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Wówczas
$$|\mathbb{E}XY| \leq (\mathbb{E}X^2)^{1/2}(\mathbb{E}Y^2)^{1/2}.$$

Co więcej, równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie dwie liczby a, b (z których co najmniej jedna jest różna od zera), że
$$\mathbb{P}(aX = bY) = 1.$$

Wniosek:

Jeśli $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są zmiennymi losowymi o skończonej i niezerowej wariancji, to $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

Ponadto, jeśli $|\rho(X, Y)| = 1$, to istnieją takie liczby
$$a, b \in \mathbb{R}, \text{ że } Y = aX + b.$$

16. Rozkład łączny zmiennych losowych – cd(5)

16. Wartość oczekiwana, macierz kowariancji

Jeśli (X, Y) jest dwuwymiarową zmienną losową, to:

a) jeśli X oraz Y są całkowalne, to wartością oczekiwaną $\mathbb{E}(X, Y)$ zmiennej (X, Y) nazywamy wektor $(\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y)$.

b) jeśli X oraz Y są całkowalne z kwadratem, to macierzą kowariancji zmiennej (X, Y) nazywamy macierz

$$\begin{bmatrix} \text{Var}X & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}Y \end{bmatrix}$$

Analogiczne wzory zachodzą dla zmiennych losowych o wartościach w $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$: wartość oczekiwaną definiujemy jako wektor $(\mathbb{E}X_1, \mathbb{E}X_2, \dots, \mathbb{E}X_d)$, a macierz kowariancji - jako $(\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq d}$.





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences