

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład VII, 13.11.2018

WARTOŚĆ OCZEKIWANA – CD.

WARIANCJA

MOMENTY

CHARAKTERYSTYKI LICZBOWE PRÓBK

Plan na dzisiaj

1. Wartość oczekiwana – dokończenie
2. Wariancja
3. Momenty
4. Charakterystyki liczbowe próbki



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd.

1. Twierdzenie 16 (wartość oczekiwana $\phi(X)$)

Założmy, że $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest pewną funkcją borelowską.

(i) Założmy, że X ma rozkład dyskretny na zbiorze S i $p_x = \mathbb{P}(X = x)$ dla $x \in S$. Wówczas zmienna losowa $\phi(X)$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$\sum_{x \in S} |\phi(x)| p_x < \infty$; wartość oczekiwana $\phi(X)$ wynosi wtedy $\mathbb{E}\phi(X) = \sum_{x \in S} \phi(x) p_x$.

(ii) Założmy, że X ma rozkład ciągły z gęstością g .

Wówczas zmienna losowa $\phi(X)$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| g(x) dx < \infty$; wartość oczekiwana wynosi wówczas $\mathbb{E}\phi(X) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) g(x) dx$.



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd. (2)

2. Przykłady zastosowań tw. 16

- rzut kostką
- zmienna ciągła
- zmienna nieciągła niedyskretna

3. Wartość oczekiwana dyskretnej zmiennej nieujemnej o wartościach całkowitych:

Twierdzenie 17

Jeśli X jest całkowalną, dyskretną zmienną losową skoncentrowaną na liczbach całkowitych nieujemnych, to


$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd. (3)

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k).$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(X = 1) + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 2) + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 3) + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 4) + \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

a więc

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd. (4)

4. Twierdzenie 18

Niech X będzie zmienną losową nieujemną.

(i) Jeśli $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)dt < \infty$,

*to X jest całkowalna i powyższa całka
to wartość oczekiwana X .*

(ii) Jeśli $p \in (0, \infty)$ i $p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t)dt < \infty$,

*to X^p jest całkowalna i powyższa całka
to wartość oczekiwana X^p .*

5. Przykłady zastosowań tw. 18

- uproszczenie obliczeń (rozkład wykładniczy, geometryczny)



- liczenie wartości oczekiwanych „dziwnych” zmiennych

14.2 Wariancja rozkładu

1. Definicja wariancji i odchylenia std.

Założmy, że X jest zmienną losową spełniającą warunki: $\mathbb{E}|X| < \infty$ oraz $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 < \infty$.

Wówczas **wariancją** zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$D^2X = \text{Var}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2.$$

Odchyleniem standardowym (rozkładu) zmiennej X nazywamy pierwiastek z wariancji:

$$\sigma_X = \sqrt{D^2X}.$$



14.2 Wariancja – cd.

2. Uwagi do definicji

- średnia kwadratu *odchylenia od średniej*
- wystarczy warunek $\mathbb{E}X^2 < \infty$
- wariancja ograniczonej zm. los. istnieje
- przydatny wzór na wariancję:

$$D^2X = \text{Var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

- wariancja zależy tylko od rozkładu zmiennej



14.2 Wariancja – cd. (2)

3. Przykłady

- co mierzy wariancja
- wariancja i odchylenie std. liczby oczek
- wariancja i odchylenie std. rozkładu jednostajnego



14.2 Wariancja – cd. (3)

4. Twierdzenie 19 (Własności wariancji)

Założmy, że zmienna X jest całkowalna z kwadratem. Wówczas

- a) $\text{Var}X \geq 0$, przy czym równość ma miejsce, gdy X jest stała z prawdopodobieństwem 1, tzn. istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, że $\mathbb{P}(X = a) = 1$.*
- b) $\text{Var}(bX) = b^2 \text{Var}X$ dla dowolnego $b \in \mathbb{R}$.*
- c) $\text{Var}(X + c) = \text{Var}X$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$.*

5. Przykład

- parametry rozkładu normalnego $N(m, \sigma^2)$
-



14.3 Parametry rozkładów

1. Definicja momentu absolutnego

Dla $p \in (0, \infty)$, momentem (absolutnym) rzędu p zmiennej X nazywamy liczbę $\mathbb{E}|X|^p$, o ile wartość oczekiwana jest skończona (w przeciwnym razie przyjmujemy, że moment jest nieskończony).

2. Definicja momentu zwykłego

Dla $p \in (0, \infty)$, momentem zwykłym rzędu p zmiennej X nazywamy liczbę $\mathbb{E}X^p$, o ile wartość oczekiwana jest skończona.

ma zawsze
sens dla p
naturalnych

3. Definicja momentu centralnego

Dla $p \in (0, \infty)$, momentem centralnym rzędu p zmiennej X nazywamy liczbę $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^p$, o ile wartość oczekiwana jest skończona.



14.3 Parametry rozkładów – cd.

4. Definicja współczynnika asymetrii

Założmy, że $\mathbb{E}|X|^3 < \infty$. Współczynnikiem asymetrii (skośności) zmiennej X nazywamy liczbę

$$\alpha_3 = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^3}{(D^2 X)^{3/2}} = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^3}{\sigma_X^3}.$$

5. Definicja kurtozy

Założmy, że $\mathbb{E}|X|^4 < \infty$. Kurtozą (współczynnikiem spłaszczenia) zmiennej X nazywamy liczbę

$$\alpha_4 = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^4}{\sigma_X^4} - 3.$$

6. Przykłady (rozkład normalny)



15. Charakterystyki liczbowe próbki

1. W *rzeczywistości* zamiast zmiennych losowych mamy tylko skończone próbki
2. Z każdą próbką związany jest rozkład empiryczny

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie ciągiem zmiennych losowych o nieznanym rozkładzie. **Rozkładem empirycznym** tej próbki nazwiemy rozkład

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}(A) = \frac{|\{i \leq n : X_i \in A\}|}{n},$$

- dla dużych n dobre przybliżenie nieznanego rozkładu!



15. Charakterystyki liczbowe próbki – cd.

3. Definicja dystrybuanty empirycznej

Dystrybuantą empiryczną próbki $X_1, X_2, \dots, X_n$ nazywamy funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, zadaną wzorem

$$F_n(t) = \mu_n((-\infty, t]) = \frac{|\{i \leq n: X_i \leq t\}|}{n}.$$

jest to dystrybuanta rozkładu empirycznego

4. Definicja kwantyla z próbki

Kwantylem rzędu p z próbki $X_1, \dots, X_n$ nazywamy dowolną liczbę x_p , taką że

$$\mu_n((-\infty, x_p]) \geq p$$

$$\mu_n([x_p, \infty)) \geq 1 - p.$$

jeśli niejednoznaczny, to często min.



15. Charakterystyki liczbowe próbki – cd (2).

5. Definicja średniej z próbki

Średnią z próbki $X_1, X_2, \dots, X_n$
nazywamy liczbę $m = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

6. Definicja wariancji z próbki

Wariancją z próbki

$X_1, X_2, \dots, X_n$ nazywamy liczbę

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2,$$

gdzie m jest średnią z próbki.





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences