

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład V, 30.10.2018

**JEDNOWYMIAROWE ZMIENNE LOSOWE – CD.
DYSTRYBUANTA ZMIENNEJ LOSOWEJ**

Plan na dzisiaj

13. Dystrybuanta zmiennej losowej
Kwantyle

14. Charakterystyki zmiennej losowej:
wartość oczekiwana
■ dla zmiennej dyskretnej



13. Dystrybuanta zmiennej losowej

1. Definicja **dystybuanty** zmiennej losowej

Dystrybuantą zmiennej losowej $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ daną wzorem $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

zależy tylko od rozkładu

2. Przykłady dystrybuant dla zmiennych

- jednopunktowej
 - dwupunktowej
 - rozkładu wykładniczego
-



13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd.

3. Twierdzenie 10 (własności dystrybuanty)

Dystrybuanta F_X zmiennej losowej X ma następujące własności:

(i) F_X jest niemalejąca,

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1,$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0,$

(iii) F_X jest prawostronnie ciągła.

4. Twierdzenie 11 (dystrybuanta $\rightarrow$ rozkład)

Jeśli funkcja $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki (i)–(iii), to istnieje przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

oraz zmienna losowa $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, taka że F jest

dystrybuantą X . Co więcej, rozkład zmiennej X jest wyznaczony jednoznacznie.

13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd. (2)

5. Dystrybuanta w rozkładzie dyskretnym

6. Twierdzenie 12 (dalsze własności dystrybuanty)

*Jeśli F_X jest dystrybuantą zmiennej losowej X ,
to dla $t \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$F_X(t-) = \mathbb{P}(X < t) \text{ oraz } F_X(t) - F_X(t-) = \mathbb{P}(X = t).$$

*W szczególności, jeśli F_X jest ciągła w punkcie t ,
to $\mathbb{P}(X = t) = 0$.*



13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd. (3)

7. Twierdzenie 13 (wyznaczanie gęstości z dystrybuanty)

Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X .

1. Jeśli F nie jest ciągła, to X nie ma rozkładu ciągłego (tzn. nie ma gęstości).

2. Załóżmy, że F jest funkcją ciągłą.

Jeśli F jest różniczkowalna poza skończonym zbiorem punktów, to funkcja

$$g(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{jeśli } F'(t) \text{ istnieje,} \\ 0 & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

jest gęstością zmiennej X .



13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd. (4)

8. Przykłady wokół tw. 13

- rozkład jednostajny
- rozkłady, które nie są ciągłe ani dyskretne

9. Twierdzenie 14 (przekształcanie zmiennych a gęstość)

Jeżeli X jest zmienną losową o gęstości f oraz X przyjmuje wartości w przedziale (a, b) , zaś funkcja $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i $\varphi'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$, to zmienna losowa $Y = \varphi(X)$ ma rozkład ciągły o gęstości $g(y) = f(h(y))|h'(y)|1_{\varphi((a,b))}(y)$, gdzie $h(s) = \varphi^{-1}(s)$.



13. Dystrybuanta zmiennej losowej – cd. (5)

10. Przykład zastosowania tw. 14

11. Definicja **kwantyla**

Niech X będzie zmienną losową, zaś $p \in [0, 1]$.

Kwantylem rzędu p zmiennej X nazywamy dowolną liczbę x_p , taką że

$$\mathbb{P}(X \leq x_p) = F_X(x_p) \geq p \text{ oraz } \mathbb{P}(X \geq x_p) \geq 1 - p.$$

Kwantyl rzędu $1/2$ nazywamy także medianą.

12. Przykłady

- kwantyle dla zmiennej dwupunktowej
- kwantyle rozkładu normalnego standardowego



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu

1. Motywacja

2. Wartość oczekiwana zmiennej dyskretnej

*Założmy, że X jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, skoncentrowanym na zbiorze $S \subset \mathbb{R}$ i niech $p_x = \mathbb{P}(X = x)$ dla $x \in S$. Mówimy, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X jest skończona (bądź że zmienna losowa X jest **całkowalna**), jeśli $\sum_{x \in S} |x|p_x < \infty$.*

*Wówczas określamy **wartość oczekiwana** zmiennej X jako $\mathbb{E}X = \sum_{x \in S} xp_x$.*

inaczej wartość średnia, zależy tylko od rozkładu!



14.1 Wartość oczekiwana rozkładu – cd.

3. Przykłady liczenia wartości oczekiwanej

- zmienna jednopunktowa
- rzut kostką
- rozkład Bernoulliego (n, p)
- niecałkowalna zmienna dyskretna x^2
 - szereg nie jest zbieżny
 - szereg nie jest absolutnie zbieżny





WARSAW UNIVERSITY
Faculty of Economic Sciences