

Rachunek Prawdopodobieństwa

Anna Janicka

wykład II, 9.10.2018

**DOKOŃCZENIE WSTĘPU,
PRAWDOPODOBIENSTWO WARUNKOWE**

Plan na dzisiaj

- 7. Przykłady przestrzeni probabilistycznych – cd.**
- 8. Podstawowe własności p-stwa – cd.**
- 9. Prawdopodobieństwo warunkowe**



7. Przykłady

1. P-stwo geometryczne
2. Inne przykłady „nieskończone”



8. Podstawowe własności prawdopodobieństwa

□ Twierdzenie 1 (arytmetyka)

Niech $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Wówczas

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(ii) Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

(iii) $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(iv) Jeśli $A \subseteq B$, to $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

(v) Jeśli $A \subseteq B$, to $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(vi) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vii) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.



8. Podstawowe własności prawdopodobieństwa – cd.

□ Twierdzenie 2 (wzór włączeń-wyłączeń)

Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, to

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots \\ & + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).\end{aligned}$$



P-stwo na zbiorze przeliczalnym

Funkcja charakterystyczna, indykator zbioru A :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in A, \\ 0 & \text{jeśli } x \notin A. \end{cases}$$



8. Podstawowe własności prawdopodobieństwa – cd.

□ Definicje ciągów wstępujących i zstępujących

*Założmy, że $A_1, A_2, \dots$ jest ciągiem zdarzeń.
Mówimy, że ciąg ten jest **wstępujący**, jeśli*
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$
*oraz że jest **zstępujący**, jeśli*
$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$



8. Podstawowe własności prawdopodobieństwa – cd.

□ Twierdzenie 3 (reguła ciągłości)

Założmy, że $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zdarzeń.

(i) Jeśli ciąg ten jest wstępujący, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

(ii) Jeśli ciąg ten jest zstępujący, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$



9. Prawdopodobieństwo warunkowe

1. Intuicja – przykłady

1. Rozkład gustów
2. „Odtwarzanie” składowych sumy oczek

2. Definicja **prawdopodobieństwa warunkowego**

*Niech A, B będą dwoma zdarzeniami, przy czym $\mathbb{P}(B) > 0$.
Wówczas **prawdopodobieństwem warunkowym**
zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B
nazywamy liczbę*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$



9. Prawdopodobieństwo warunkowe – cd.

- 3. Prawdopodobieństwo warunkowe to prawdopodobieństwo (dla ustalonego B)
- 4. Twierdzenie 4 (**wzór łańcuchowy**)

*Dla dowolnych zdarzeń $A_1, \dots, A_n$,
spełniających warunek*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0,$$

zachodzi $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) =$

$$\mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$



9. Prawdopodobieństwo warunkowe – cd.

- 5. Przykład – wzór łańcuchowy (losowanie asów)
- 6. Definicja **rozbicia przestrzeni Ω**

*Rozbiciem przestrzeni Ω
nazywamy dowolną rodzinę zdarzeń
 $\{H_i\}_{i \in I}$, taką że $H_i \cap H_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
oraz $\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$.*

rozbicie skończone, przeliczalne



9. Prawdopodobieństwo warunkowe – cd.

7. Twierdzenie 5 (wzór na prawdopodobieństwo całkowite)

Dla dowolnego skończonego rozbicia $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ zbioru Ω na zbiory o dodatnim prawdopodobieństwie i dowolnego zdarzenia A zachodzi równość

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Dla przeliczalnego rozbicia – analogicznie.

8. Przykład rozbicia: producent samochodów

9. Przykład: kule. Ważna jest wiedza.



Faculty of Economic Sciences

9. Prawdopodobieństwo warunkowe – cd.

10. Twierdzenie 6 (wzór Bayesa)

Niech $\{H_i\}_{i \in I}$ będzie przeliczalnym rozbiem Ω na zdarzenia o dodatnich prawdopodobieństwach. Wówczas, dla dowolnego zdarzenia A o dodatnim prawdopodobieństwie, zachodzi

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_j)\mathbb{P}(H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$

11. Przykład (wady samochodów, kule)

