

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 8 grudnia 2017r., grupa A

Z poniższych siedmiu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min

1. W urnie jest 6 białych, 7 czarnych i 3 żółte kule. Losujemy 5 razy po jednej kuli ze zwracaniem.
 - a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul jest co najmniej jedna biała kula.
 - b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wyciągnięto co najmniej jedną kulę w każdym kolorze.
 - c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych czarnych kul.

2. Liczba wypadków danego dnia na ulicach pewnego miasta ma rozkład Poissona z parametrem 1, jeśli tym dniem jest sobota lub niedziela, oraz Poissona z parametrem 5, jeśli jest to poniedziałek, wtorek, środa, czwartek lub piątek. Wiadomo, że w trakcie pewnych losowo wybranych kolejnych dwóch dni nie było żadnego wypadku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie dwóch dni z rzędu tydzień później (w tych samych dniach tygodnia) również nie będzie wypadku?

3. Inwestor postanawia ulokować swój kapitał w akcje pewnych dwudziestu spółek $S_1, S_2, \dots, S_{20}$ notowanych na giełdzie. W tym celu rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo uzyskania orła wynosi $1/5$. Jeśli wypadł orzeł, kupuje 50 akcji losowo wybranej spółki (każda ma tę samą szansę na wybranie). Jeśli zaś wypadła reszka, wybiera losowo pięć spółek (każdy wybór ma to samo prawdopodobieństwo), a następnie kupuje po 10 akcji każdej z nich.

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że inwestor kupił co najmniej 10 akcji spółki S_1 .
- b) Pewnego dnia, inwestor zgubił dotychczasową monetę i zaczął używać nowej, na której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p . Zaobserwował, że podczas 100 kolejnych operacji: 5 razy kupił dokładnie 10 akcji spółki S_1 , 4 razy kupił 50 akcji spółki S_1 , a w pozostałych przypadkach nie kupował akcji spółki S_1 . Dla jakiej wartości p rozkład empiryczny związany z zaobserwowaną próbą pokrywa się z rozkładem teoretycznym liczby kupionych akcji spółki S_1 ?

4. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -3, \\ \frac{1}{6} & \text{jeśli } -3 \leq t < -1, \\ \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} & \text{jeśli } -1 \leq t < 1, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 1. \end{cases}$$

- a) Czy X ma rozkład ciągły? Czy X ma rozkład dyskretny? Odpowiedzi uzasadnić.
- b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = X^2$ w punkcie 1.
- c) Obliczyć średnią i wariancję zmiennej $Z = X + 3$ (Wskazówka: wyznaczyć dystrybuantę Z).

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{8}{x^3} \mathbb{1}_{[2, \infty)}(x)$.

- a) Obliczyć kwantyl rzędu $1/3$ rozkładu zmiennej X oraz wartość oczekiwaną zmiennej $4/X$.
- b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = \sqrt{2X^2 + 1}$ i rozstrzygnąć, czy Y posiada gęstość.

6. Czas trwania rozmowy telefonicznej (liczony w sekundach) ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 200]$. Z prawdopodobieństwem $1/20$ rozmowa jest w roamingu i operator nalicza opłatę proporcjonalnie w wysokości 2 grosze za każdą sekundę rozmowy; w pozostałych przypadkach opłata za rozmowę jest wliczona w cenę abonamentu 50 zł. W maju wykonano łącznie 120 niezależnych połączeń.

- a) Obliczyć wartość oczekiwaną kwoty na fakturze za maj.
- b) Korzystając z twierdzenia Poissona obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że wykonano co najmniej trzy połączenia, z których każde wiązało się z dodatkową opłatą nie mniejszą niż 1 zł.

7. Dorysowujemy dodatkowe oczko na pewnej ścianie prawidłowej sześcienniej kostki, a następnie wykonujemy rzut tą kostką, oznaczając liczbę uzyskanych oczek przez X . Którą ściankę powinniśmy wybrać, aby wariancja zmiennej X była jak najmniejsza?

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 8 grudnia 2017r., grupa B

Z poniższych siedmiu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. W urnie jest 5 białych, 8 czarnych i 2 żółte kule. Losujemy 5 razy po jednej kuli ze zwracaniem.
 - a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul jest co najmniej jedna czarna kula.
 - b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wyciągnięto co najmniej jedną kulę w każdym kolorze.
 - c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych białych kul.

2. Liczba wypadków danego dnia na ulicach pewnego miasta ma rozkład Poissona z parametrem 2, jeśli tym dniem jest sobota lub niedziela, oraz Poissona z parametrem 4, jeśli jest to poniedziałek, wtorek, środa, czwartek lub piątek. Wiadomo, że w trakcie pewnych losowo wybranych kolejnych dwóch dni nie było żadnego wypadku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie dwóch dni z rzędu dwa tygodnie później (w tych samych dniach tygodnia) również nie będzie wypadku?

3. Inwestor postanawia ulokować swój kapitał w akcje pewnych trzydziestu spółek $S_1, S_2, \dots, S_{30}$ notowanych na giełdzie. W tym celu rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo uzyskania orła wynosi $1/4$. Jeśli wypadł orzeł, kupuje 60 akcji losowo wybranej spółki (każda ma tę samą szansę na wybranie). Jeśli zaś wypadła reszka, wybiera losowo sześć spółek (każdy wybór ma to samo prawdopodobieństwo), a następnie kupuje po 10 akcji każdej z nich.

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że inwestor kupił co najmniej 10 akcji spółki S_2 .
- b) Pewnego dnia, inwestor zgubił dotychczasową monetę i zaczął używać nowej, na której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p . Zaobserwował, że podczas 90 kolejnych operacji: 2 razy kupił 60 akcji spółki S_2 , 6 razy kupił dokładnie 10 akcji spółki S_2 , a w pozostałych przypadkach nie kupował akcji spółki S_2 . Dla jakiej wartości p rozkład empiryczny związany z zaobserwowaną próbą pokrywa się z rozkładem teoretycznym liczby kupionych akcji spółki S_2 ?

4. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -4, \\ \frac{1}{10} & \text{jeśli } -4 \leq t < -1, \\ \frac{1}{4}t + \frac{2}{3} & \text{jeśli } -1 \leq t < 1, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 1. \end{cases}$$

- a) Czy X ma rozkład ciągły? Czy X ma rozkład dyskretny? Odpowiedzi uzasadnić.
- b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = X^2$ w punkcie 1.
- c) Obliczyć średnią i wariancję zmiennej $Z = X + 4$ (Wskazówka: wyznaczyć dystrybuantę Z).

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{64}{x^5} \mathbb{1}_{[2, \infty)}(x)$.

- a) Obliczyć kwantyl rzędu $1/4$ rozkładu zmiennej X oraz wartość oczekiwaną zmiennej $1/X$.
- b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = \sqrt{X^2 + 5}$ i rozstrzygnąć, czy Y posiada gęstość.

6. Czas trwania rozmowy telefonicznej (liczony w sekundach) ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 250]$. Z prawdopodobieństwem $1/60$ rozmowa jest w roamingu i operator nalicza opłatę proporcjonalnie w wysokości 4 grosze za każdą sekundę rozmowy; w pozostałych przypadkach opłata za rozmowę jest wliczona w cenę abonamentu 40 zł. W czerwcu wykonano łącznie 150 niezależnych połączeń.

- a) Obliczyć wartość oczekiwaną kwoty na fakturze za czerwiec.
- b) Korzystając z twierdzenia Poissona obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że wykonano co najmniej dwa połączenia, z których każde wiązało się z dodatkową opłatą nie mniejszą niż 2 zł.

7. Dorysowujemy dodatkowe oczko na pewnej ścianie prawidłowej sześcienniej kostki, a następnie wykonujemy rzut tą kostką, oznaczając liczbę uzyskanych oczek przez X . Którą ściankę powinniśmy wybrać, aby wariancja zmiennej X była jak największa?

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 8 grudnia 2017r., grupa C

Z poniższych siedmiu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. W urnie jest 7 białych, 5 czarnych i 3 żółte kule. Losujemy 5 razy po jednej kuli ze zwracaniem.
 - a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul jest co najmniej jedna żółta kula.
 - b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wyciągnięto co najmniej jedną kulę w każdym kolorze.
 - c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych żółtych kul.

2. Liczba wypadków danego dnia na ulicach pewnego miasta ma rozkład Poissona z parametrem 5, jeśli tym dniem jest sobota lub niedziela, oraz Poissona z parametrem 1, jeśli jest to poniedziałek, wtorek, środa, czwartek lub piątek. Wiadomo, że w trakcie pewnych losowo wybranych kolejnych dwóch dni nie było żadnego wypadku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie dwóch dni z rzędu trzy tygodnie później (w tych samych dniach tygodnia) również nie będzie wypadku?

3. Inwestor postanawia ulokować swój kapitał w akcje pewnych czterdziestu spółek $S_1, S_2, \dots, S_{40}$ notowanych na giełdzie. W tym celu rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo uzyskania orła wynosi $1/3$. Jeśli wypadł orzeł, kupuje 80 akcji losowo wybranej spółki (każda ma tę samą szansę na wybranie). Jeśli zaś wypadła reszka, wybiera losowo cztery spółki (każdy wybór ma to samo prawdopodobieństwo), a następnie kupuje po 20 akcji każdej z nich.

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że inwestor kupił co najmniej 20 akcji spółki S_3 .
- b) Pewnego dnia, inwestor zgubił dotychczasową monetę i zaczął używać nowej, na której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p . Zaobserwował, że podczas 80 kolejnych operacji: 1 raz kupił 80 akcji spółki S_3 , 4 razy kupił dokładnie 20 akcji spółki S_3 , a w pozostałych przypadkach nie kupował akcji spółki S_3 . Dla jakiej wartości p rozkład empiryczny związany z zaobserwowaną próbą pokrywa się z rozkładem teoretycznym liczby kupionych akcji spółki S_3 ?

4. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -6, \\ \frac{1}{8} & \text{jeśli } -6 \leq t < -2, \\ \frac{1}{6}t + \frac{1}{2} & \text{jeśli } -2 \leq t < 2, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 2. \end{cases}$$

- a) Czy X ma rozkład ciągły? Czy X ma rozkład dyskretny? Odpowiedzi uzasadnić.
- b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = X^2$ w punkcie 4.
- c) Obliczyć średnią i wariancję zmiennej $Z = X + 6$ (Wskazówka: wyznaczyć dystrybuantę Z).

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{18}{x^3} \mathbf{1}_{[3, \infty)}(x)$.

- a) Obliczyć kwantyl rzędu $1/5$ rozkładu zmiennej X oraz wartość oczekiwaną zmiennej $6/X$.
- b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = \sqrt{5X^2 + 4}$ i rozstrzygnąć, czy Y posiada gęstość.

6. Czas trwania rozmowy telefonicznej (liczony w sekundach) ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 180]$. Z prawdopodobieństwem $1/30$ rozmowa jest w roamingu i operator nalicza opłatę proporcjonalnie w wysokości 5 groszy za każdą sekundę rozmowy; w pozostałych przypadkach opłata za rozmowę jest wliczona w cenę abonamentu 60 zł. W lipcu wykonano łącznie 180 niezależnych połączeń.

- a) Obliczyć wartość oczekiwaną kwoty na fakturze za lipiec.
- b) Korzystając z twierdzenia Poissona obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że wykonano co najmniej dwa połączenia, z których każde wiązało się z dodatkową opłatą nie mniejszą niż 3 zł.

7. Zamalowujemy jedno oczko na pewnej ścianie prawidłowej sześciennej kostki (tj. zmniejszamy liczbę oczek na tej ścianie o 1), a następnie wykonujemy rzut tą kostką, oznaczając liczbę uzyskanych oczek przez X . Którą ściankę powinniśmy wybrać, aby wariancja zmiennej X była jak najmniejsza?

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 8 grudnia 2017r., grupa D

Z poniższych siedmiu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. W urnie jest 5 białych, 6 czarnych i 4 żółte kule. Losujemy 5 razy po jednej kuli ze zwracaniem.
 - a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul jest co najmniej jedna czarna kula.
 - b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wyciągnięto co najmniej jedną kulę w każdym kolorze.
 - c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych żółtych kul.

2. Liczba wypadków danego dnia na ulicach pewnego miasta ma rozkład Poissona z parametrem 3, jeśli tym dniem jest sobota lub niedziela, oraz Poissona z parametrem 2, jeśli jest to poniedziałek, wtorek, środa, czwartek lub piątek. Wiadomo, że w trakcie pewnych losowo wybranych kolejnych dwóch dni nie było żadnego wypadku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie dwóch dni z rzędu cztery tygodnie później (w tych samych dniach tygodnia) również nie będzie wypadku?

3. Inwestor postanawia ulokować swój kapitał w akcje pewnych dwudziestu spółek $S_1, S_2, \dots, S_{20}$ notowanych na giełdzie. W tym celu rzuca monetą, dla której prawdopodobieństwo uzyskania orła wynosi $2/3$. Jeśli wypadł orzeł, kupuje 100 akcji losowo wybranej spółki (każda ma tę samą szansę na wybranie). Jeśli zaś wypadła reszka, wybiera losowo pięć spółek (każdy wybór ma to samo prawdopodobieństwo), a następnie kupuje po 20 akcji każdej z nich.

- a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że inwestor kupił co najmniej 20 akcji spółki S_4 .
- b) Pewnego dnia, inwestor zgubił dotychczasową monetę i zaczął używać nowej, na której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p . Zaobserwował, że podczas 100 kolejnych operacji: 2 razy kupił 100 akcji spółki S_4 , 15 razy kupił dokładnie 20 akcji spółki S_4 , a w pozostałych przypadkach nie kupował akcji spółki S_4 . Dla jakiej wartości p rozkład empiryczny związany z zaobserwowaną próbą pokrywa się z rozkładem teoretycznym liczby kupionych akcji spółki S_4 ?

4. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -5, \\ \frac{1}{20} & \text{jeśli } -5 \leq t < -2, \\ \frac{1}{5}t + \frac{1}{2} & \text{jeśli } -2 \leq t < 2, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 2. \end{cases}$$

- a) Czy X ma rozkład ciągły? Czy X ma rozkład dyskretny? Odpowiedzi uzasadnić.
- b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = X^2$ w punkcie 4.
- c) Obliczyć średnią i wariancję zmiennej $Z = X + 5$ (Wskazówka: wyznaczyć dystrybuantę Z).

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{24}{x^4} \mathbb{1}_{[2, \infty)}(x)$.

- a) Obliczyć kwantyl rzędu $2/3$ rozkładu zmiennej X oraz wartość oczekiwaną zmiennej $3/X$.
- b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej $Y = \sqrt{3X^2 + 4}$ i rozstrzygnąć, czy Y posiada gęstość.

6. Czas trwania rozmowy telefonicznej (liczony w sekundach) ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 300]$. Z prawdopodobieństwem $1/40$ rozmowa jest w roamingu i operator nalicza opłatę proporcjonalnie w wysokości 4 grosze za każdą sekundę rozmowy; w pozostałych przypadkach opłata za rozmowę jest wliczona w cenę abonamentu 30 zł. W lutym wykonano łącznie 120 niezależnych połączeń.

- a) Obliczyć wartość oczekiwaną kwoty na fakturze za luty.
- b) Korzystając z twierdzenia Poissona obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że wykonano co najmniej trzy połączenia, z których każde wiązało się z dodatkową opłatą nie mniejszą niż 4 zł.

7. Zamalowujemy jedno oczko na pewnej ścianie prawidłowej sześciennej kostki (tj. zmniejszamy liczbę oczek na tej ścianie o 1), a następnie wykonujemy rzut tą kostką, oznaczając liczbę uzyskanych oczek przez X . Którą ściankę powinniśmy wybrać, aby wariancja zmiennej X była jak największa?