

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5 lutego 2018r., grupa A

Z poniższych sześciu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Zmienne losowe X , Y są niezależne i mają rozkłady z gęstościami $g_X(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ oraz $g_Y(y) = \frac{3}{8}y^2\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$, odpowiednio. Obliczyć $\text{Cov}(X, XY + 4)$, $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$ oraz $\mathbb{E}(YX^2 + \sin Y | Y)$.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(2, -1)$ oraz macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Rozstrzygnąć, czy zmienne $X - Y + 3$, $3X + 6Y - 12$ są niezależne.

b) Czy istnieje liczba rzeczywista a taka, że zmienne $aX + Y$ oraz $X + 2aY$ mają ten sam rozkład?

3. Rzucamy parą prawidłowych kostek, a następnie zapisujemy maksimum z uzyskanych liczb na kartce. Czynność powtarzamy nieskończenie wiele razy.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaimé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że liczba szóstek wśród pierwszych 324 zapisanych liczb jest niemniejsza niż 109 lub nie większa niż 89.

b) Niech X_n oznacza n -tą liczbę zapisaną na kartce. Czy ciąg $((X_1 + X_2 + \dots + X_{2n})/n)^3$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny p.n.? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć jego granicę.

4. W magazynie znaleziono pewne urządzenie pomiarowe. Ze względu na brak dokumentacji i informacji o zużyciu urządzenia, wiadomo jedynie, iż jego (nieznana) dokładność X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 5. Błąd Y związany z użyciem urządzenia, przy założeniu iż $X = x$, jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, e^{-5x})$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że błąd związany z użyciem urządzenia będzie większy niż $1/2$.

b) Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

5. Dług publiczny pewnego państwa, liczony w milionach koron, każdego dnia przyrasta o pewną niezależną kwotę, której wysokość jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Każdego dnia rząd może interweniować z prawdopodobieństwem $1/9$, w wyniku czego dług tego dnia nie ulegnie zmianie; decyzja o interwencji jest podejmowana na podstawie zewnętrznych czynników niezależnych od zachowania długu i wcześniejszych działań.

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pierwszych 162 dni rząd zainterweniuje co najmniej 20 razy.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pierwszych 288 dni dług wzrośnie o mniej niż 124 miliony koron.

Wskazówka do b): przyrost długu danego dnia można zapisać jako $X \cdot Y$, gdzie X , Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$ oraz $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{8}{9}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{9}$.

6. Towarzystwo ubezpieczeniowe oferujące krótkoterminowe, miesięczne ubezpieczenia zdrowotne, wprowadziło następujący system zniżek. Każdemu klientowi przysługuje zniżka 0%, 10%, 20% lub 30%. W razie bezszkodowego miesiąca, zniżka w kolejnym miesiącu wzrasta o 10 punktów procentowych (aż do osiągnięcia maksymalnego pułapu 30%); w przypadku wystąpienia szkody, zniżka w kolejnym miesiącu maleje o 10 punktów procentowych (aż do osiągnięcia minimalnego poziomu 0%). Pan Kowalski postanawia wykupywać powyższe krótkoterminowe polisy, na wstępie przysługuje mu zniżka 10% (dziedziczona od poprzedniego ubezpieczyciela). Wiadomo, iż w trakcie ustalonego miesiąca prawdopodobieństwo, że Pan Kowalski będzie musiał korzystać z usług medycznych, wynosi $\frac{1}{3}$.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po trzech miesiącach zniżka pana Kowalskiego będzie wynosiła 0%?

b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby miesięcy, po których zniżka pana Kowalskiego po raz pierwszy sięgnie maksymalnej wartości 30%.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w miesiącu o numerze 100 zniżka pana Kowalskiego będzie wynosić 20% lub 30%.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5 lutego 2018r., grupa B

Z poniższych sześciu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady z gęstościami $g_X(x) = 3x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ oraz $g_Y(y) = \frac{1}{2}y \mathbb{1}_{[0,2]}(y)$, odpowiednio. Obliczyć $\text{Cov}(XY - 3, X)$, $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$ oraz $\mathbb{E}(YX^2 - \cos Y | Y)$.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(-2, 1)$ oraz macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Rozstrzygnąć, czy zmienne $X + Y + 5$, $2X - 4Y + 1$ są niezależne.

b) Czy istnieje liczba rzeczywista a taka, że zmienne $X + aY$ oraz $3aX + Y$ mają ten sam rozkład?

3. Rzucamy parą prawidłowych kostek, a następnie zapisujemy maksimum z uzyskanych liczb na kartce. Czynność powtarzamy nieskończenie wiele razy.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaimé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że liczba piątek wśród pierwszych 300 zapisanych liczb jest niemniejsza niż 85 lub nie większa niż 65.

b) Niech X_n oznacza n -tą liczbę zapisaną na kartce. Czy ciąg $((X_1 + X_2 + \dots + X_{3n})/n)^5$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny p.n.? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć jego granicę.

4. W magazynie znaleziono pewne urządzenie pomiarowe. Ze względu na brak dokumentacji i informacji o zużyciu urządzenia, wiadomo jedynie, iż jego (nieznana) dokładność X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Błąd Y związany z użyciem urządzenia, przy założeniu iż $X = x$, jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, e^{-2x})$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że błąd związany z użyciem urządzenia będzie większy niż $1/3$.

b) Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

5. Dług publiczny pewnego państwa, liczony w milionach koron, każdego dnia przyrasta o pewną niezależną kwotę, której wysokość jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 4]$. Każdego dnia rząd może interweniować z prawdopodobieństwem $1/8$, w wyniku czego dług tego dnia nie ulegnie zmianie; decyzja o interwencji jest podejmowana na podstawie zewnętrznych czynników niezależnych od zachowania długu i wcześniejszych działań.

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pierwszych 112 dni rząd zainterweniuje co najmniej 21 razy.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pierwszych 231 dni dług wzrośnie o mniej niż 400 milionów koron.

Wskazówka do b): przyrost długu danego dnia można zapisać jako $X \cdot Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X ma rozkład jednostajny na $[0, 3]$ oraz $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{7}{8}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{8}$.

6. Towarzystwo ubezpieczeniowe oferujące krótkoterminowe, miesięczne ubezpieczenia zdrowotne, wprowadziło następujący system zniżek. Każdemu klientowi przysługuje zniżka 0%, 10%, 20% lub 30%. W razie bezszkodowego miesiąca, zniżka w kolejnym miesiącu wzrasta o 10 punktów procentowych (aż do osiągnięcia maksymalnego pułapu 30%); w przypadku wystąpienia szkody, zniżka w kolejnym miesiącu maleje o 10 punktów procentowych (aż do osiągnięcia minimalnego poziomu 0%). Pan Kowalski postanawia wykupywać powyższe krótkoterminowe polisy, na wstępie przysługuje mu zniżka 10% (dziedziczona od poprzedniego ubezpieczyciela). Wiadomo, iż w trakcie ustalonego miesiąca prawdopodobieństwo, że Pan Kowalski będzie musiał korzystać z usług medycznych, wynosi $\frac{2}{3}$.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po trzech miesiącach zniżka pana Kowalskiego będzie wynosiła 20%?

b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby miesięcy, po których zniżka pana Kowalskiego po raz pierwszy sięgnie minimalnej wartości 0%.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w miesiącu o numerze 100 zniżka pana Kowalskiego będzie wynosić 10% lub 20%.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5 lutego 2018r., grupa C

Z poniższych sześciu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady z gęstościami $g_X(x) = \frac{3}{8}x^2\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ oraz $g_Y(y) = \frac{1}{2}y\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$, odpowiednio. Obliczyć $\text{Cov}(XY, Y - 3)$, $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$ oraz $\mathbb{E}(XY^2 - \sin X | X)$.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(1, -2)$ oraz macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Rozstrzygnąć, czy zmienne $X + Y + 1$, $6X - 3Y + 11$ są niezależne.

b) Czy istnieje liczba rzeczywista a taka, że zmienne $aX + Y$ oraz $X - 2aY$ mają ten sam rozkład?

3. Rzucamy parą prawidłowych kostek, a następnie zapisujemy minimum z uzyskanych liczb na kartce. Czynność powtarzamy nieskończenie wiele razy.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaimé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że liczba jedynek wśród pierwszych 144 zapisanych liczb jest niemniejsza niż 54 lub nie większa niż 34.

b) Niech X_n oznacza n -tą liczbę zapisaną na kartce. Czy ciąg $((X_1 + X_2 + \dots + X_{2n})/n)^4$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny p.n.? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć jego granicę.

4. W magazynie znaleziono pewne urządzenie pomiarowe. Ze względu na brak dokumentacji i informacji o zużyciu urządzenia, wiadomo jedynie, iż jego (nieznana) dokładność X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 3. Błąd Y związany z użyciem urządzenia, przy założeniu iż $X = x$, jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, e^{-3x})$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że błąd związany z użyciem urządzenia będzie większy niż $1/4$.

b) Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

5. Dług publiczny pewnego państwa, liczony w milionach koron, każdego dnia przyrasta o pewną niezależną kwotę, której wysokość jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Każdego dnia rząd może interweniować z prawdopodobieństwem $1/7$, w wyniku czego dług tego dnia nie ulegnie zmianie; decyzja o interwencji jest podejmowana na podstawie zewnętrznych czynników niezależnych od zachowania długu i wcześniejszych działań.

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pierwszych 294 dni rząd zainterweniuje co najmniej 40 razy.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pierwszych 245 dni dług wzrośnie o mniej niż 100 milionów koron.

Wskazówka do b): przyrost długu danego dnia można zapisać jako $X \cdot Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$ oraz $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{6}{7}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{7}$.

6. Towarzystwo ubezpieczeniowe oferujące krótkoterminowe, miesięczne ubezpieczenia zdrowotne, wprowadziło następujący system zniżek. Każdemu klientowi przysługuje zniżka 0%, 10%, 20% lub 30%. W razie bezszkodowego miesiąca, zniżka w kolejnym miesiącu wzrasta o 10 punktów procentowych (aż do osiągnięcia maksymalnego pułapu 30%); w przypadku wystąpienia szkody, zniżka w kolejnym miesiącu maleje o 10 punktów procentowych (aż do osiągnięcia minimalnego poziomu 0%). Pan Kowalski postanawia wykupywać powyższe krótkoterminowe polisy, na wstępie przysługuje mu zniżka 10% (dziedziczona od poprzedniego ubezpieczyciela). Wiadomo, iż w trakcie ustalonego miesiąca prawdopodobieństwo, że Pan Kowalski będzie musiał korzystać z usług medycznych, wynosi $\frac{1}{3}$.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po trzech miesiącach zniżka pana Kowalskiego będzie wynosiła 30%?

b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby miesięcy, po których zniżka pana Kowalskiego po raz pierwszy sięgnie maksymalnej wartości 30%.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w miesiącu o numerze 100 zniżka pana Kowalskiego będzie wynosić 0% lub 10%.

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5 lutego 2018r., grupa D

Z poniższych sześciu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą. Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady z gęstościami $g_X(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ oraz $g_Y(y) = 3y^2\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$, odpowiednio. Obliczyć $\text{Cov}(Y, XY + 2)$, $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$ oraz $\mathbb{E}(XY^2 - \cos X | X)$.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(-1, 2)$ oraz macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Rozstrzygnąć, czy zmienne $X + Y + 3$, $4X - 3Y + 13$ są niezależne.

b) Czy istnieje liczba rzeczywista a taka, że zmienne $X + aY$ oraz $2aX + Y$ mają ten sam rozkład?

3. Rzucamy parą prawidłowych kostek, a następnie zapisujemy minimum z uzyskanych liczb na kartce. Czynność powtarzamy nieskończenie wiele razy.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaimé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że liczba dwójek wśród pierwszych 200 zapisanych liczb jest niemniejsza niż 60 lub nie większa niż 40.

b) Niech X_n oznacza n -tą liczbę zapisaną na kartce. Czy ciąg $((X_1 + X_2 + \dots + X_{3n})/n)^2$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny p.n.? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć jego granicę.

4. W magazynie znaleziono pewne urządzenie pomiarowe. Ze względu na brak dokumentacji i informacji o zużyciu urządzenia, wiadomo jedynie, iż jego (nieznana) dokładność X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 4. Błąd Y związany z użyciem urządzenia, przy założeniu iż $X = x$, jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, e^{-4x})$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że błąd związany z użyciem urządzenia będzie większy niż $1/5$.

b) Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

5. Dług publiczny pewnego państwa, liczony w milionach koron, każdego dnia przyrasta o pewną niezależną kwotę, której wysokość jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Każdego dnia rząd może interweniować z prawdopodobieństwem $1/6$, w wyniku czego dług tego dnia nie ulegnie zmianie; decyzja o interwencji jest podejmowana na podstawie zewnętrznych czynników niezależnych od zachowania długu i wcześniejszych działań.

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pierwszych 180 dni rząd zainterweniuje co najmniej 35 razy.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu pierwszych 240 dni dług wzrośnie o mniej niż 190 milionów koron.

Wskazówka do b): przyrost długu danego dnia można zapisać jako $X \cdot Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że X ma rozkład jednostajny na $[0, 2]$ oraz $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{5}{6}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{6}$.

6. Towarzystwo ubezpieczeniowe oferujące krótkoterminowe, miesięczne ubezpieczenia zdrowotne, wprowadziło następujący system zniżek. Każdemu klientowi przysługuje zniżka 0%, 10%, 20% lub 30%. W razie bezszkodowego miesiąca, zniżka w kolejnym miesiącu wzrasta o 10 punktów procentowych (aż do osiągnięcia maksymalnego pułapu 30%); w przypadku wystąpienia szkody, zniżka w kolejnym miesiącu maleje o 10 punktów procentowych (aż do osiągnięcia minimalnego poziomu 0%). Pan Kowalski postanawia wykupywać powyższe krótkoterminowe polisy, na wstępie przysługuje mu zniżka 10% (dziedziczona od poprzedniego ubezpieczyciela). Wiadomo, iż w trakcie ustalonego miesiąca prawdopodobieństwo, że Pan Kowalski będzie musiał korzystać z usług medycznych, wynosi $\frac{2}{3}$.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po trzech miesiącach zniżka pana Kowalskiego będzie wynosiła 10%?

b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby miesięcy, po których zniżka pana Kowalskiego po raz pierwszy sięgnie minimalnej wartości 0%.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w miesiącu o numerze 100 zniżka pana Kowalskiego będzie wynosić 0% lub 30%.