Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 30.01.2015
grupa A

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa A). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Gęstość dwuwymiarowego wektora losowego (X,Y) dana jest wzorem $g(x,y) = \frac{1}{2x}\mathbb{1}_{\{0<y\leqslant x\leqslant 2\}}$.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   (b) Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$.

2. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład normalny o średniej $(0,0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Znajdź wariancję zmiennej $X-Y$.
   (b) Czy zmienne Y^2 i $(X-Y)^2$ są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!
   (c) Jaki jest rozkład zmiennej $Z = Y^2 + (X-Y)^2$? Podaj gęstość lub nazwę tego rozkładu.
   (d) Oblicz $\mathbb{E}Z$ i $\mathrm{Var}Z$.

3. Analityk giełdowy zauważył, że dzienna zmiana indeksu giełdy papierów wartościowych, wyrażona w procentach, ma rozkład o gęstości $g(x) = \frac{1}{100}|x|\mathbb{1}_{\{|x|\leqslant 10\}}$. Ponadto, jeśli w ciągu danego dnia zmiana indeksu wyniosła $x\%$, to wielkość obrotów z tego samego dnia, wyrażona w mld zł, ma rozkład jednostajny na przedziale $[5, \frac{1}{2}|x|+5]$. Niech X i Y oznaczają odpowiednio zmianę indeksu (w %) i obroty (w mld zł) giełdy w dniu 30.01.2015 r.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}Y$.
   (b) Znajdź rozkład wektora (X,Y) oraz rozkład zmiennej Y.

4. Wartości zakupów dokonanych przez klientów w kiosku, X_n, są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 9 zł i odchyleniu standardowym 1,5. Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować prawdopodobieństwo, że utarg na 60 klientach będzie zawierał się w przedziale $(525, 555)$ zł. Czy ciąg $\frac{X_1+\cdots+X_n}{3n}$ jest zbieżny prawie na pewno? Jeśli tak, podać granicę.

5. Samochód marki X pozostaje w trakcie gwarancji bezawaryjny z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że na 1200 sprzedanych samochodów awarii w trakcie gwarancji ulegnie nie mniej niż 270 i nie więcej niż 345 samochodów (zakładamy niezależność awarii poszczególnych samochodów). Ponadto, wiadomo, iż jeśli samochód ulegnie awarii, koszt naprawy gwarancyjnej jest zmienną losową z rozkładu o średniej 2000 i wariancji 1000^2 (jeśli nie ulegnie awarii, koszty serwisowania wynoszą 0). Obliczyć wartość oczekiwaną całkowitych wydatków firmy związanych z serwisem gwarancyjnym partii 1200 samochodów oraz przybliżyć prawdopodobieństwo, że wydatki te przekroczą 600 000. *Wskazówka. Być może nie wszystkie wielkości z formuły w CTG trzeba wyliczyć, aby podać wynik końcowy.*

6. Pewien ośrodek badawczy przeprowadza comiesięczne analizy przepływów na rynku pracy między grupami pracujących, bezrobotnych oraz nieaktywnych zawodowo. Z zebranych danych wynika, że jeśli w danym okresie respondent jest nieaktywny, to w kolejnym okresie pozostanie nieaktywny z prawdopodobieństwem 0,7, zaś z prawdopodobieństwem 0,3 znajdzie pracę. Jeśli w danym okresie respondent jest zatrudniony, to w kolejnym okresie pozostanie zatrudniony z prawdopodobieństwem 0,7, z prawdopodobieństwem 0,1 zostanie bezrobotnym i z prawdopodobieństwem 0,2 zdezaktywizuje się. Jeśli zaś w danym okresie respondent jest bezrobotny, w kolejnym pozostanie bezrobotny z prawdopodobieństwem 0,5, zatrudni się z prawdopodobieństwem 0,3 i stanie się nieaktywny z prawdopodobieństwem 0,2.
   (a) Przy założeniu, że zaobserwowane prawidłowości mają miejsce od dłuższego czasu, wyznaczyć średni odsetek osób nieaktywnych zawodowo w populacji.
   (b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba pracująca w styczniu 2015 roku będzie pracująca w marcu 2015 roku.
   (c) Pewien respondent znalazł pracę w styczniu 2015 roku. Wyznaczyć oczekiwaną liczbę miesięcy, jakie upłyną do chwili utraty lub rezygnacji z pracy.

$\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(1) \approx 0{,}841$, $\Phi(1{,}5) \approx 0{,}933$, $\Phi(2) \approx 0{,}977$, $\Phi(2{,}5) \approx 0{,}994$, $\Phi(3) \approx 0{,}9987$, $\Phi(4) \approx 0{,}99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 30.01.2015
grupa B

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0 - 10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa B). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Gęstość dwuwymiarowego wektora losowego (X, Y) dana jest wzorem $g(x, y) = \frac{1}{2y} \mathbb{1}_{\{0<x\leqslant y\leqslant 2\}}$.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ oraz $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   (b) Oblicz $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$.

2. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Znajdź wariancję zmiennej $X + Y$.
   (b) Czy zmienne Y^2 i $(X + Y)^2$ są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!
   (c) Jaki jest rozkład zmiennej $Z = Y^2 + (X + Y)^2$? Podaj gęstość lub nazwę tego rozkładu.
   (d) Oblicz $\mathbb{E}Z$ i $\mathrm{Var}Z$.

3. Analityk giełdowy zauważył, że dzienna zmiana indeksu giełdy papierów wartościowych, wyrażona w procentach, ma rozkład o gęstości $g(x) = \frac{1}{25}|x|\mathbb{1}_{\{-5\leqslant x\leqslant 5\}}$. Ponadto, jeśli w ciągu danego dnia zmiana indeksu wyniosła $x\%$, to wielkość obrotów z tego samego dnia, wyrażona w mld zł, ma rozkład jednostajny na przedziale $[5, 2|x| + 5]$. Niech X i Y oznaczają odpowiednio zmianę indeksu (w %) i obroty (w mld zł) giełdy w dniu 30.01.2015 r.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}Y$.
   (b) Znajdź rozkład wektora (X, Y) oraz rozkład zmiennej Y.

4. Wartości zakupów dokonanych przez klientów w kiosku, X_n, są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 5 zł i odchyleniu standardowym 1,5. Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować prawdopodobieństwo, że utarg na 30 klientach będzie zawierał się w przedziale $(140, 160)$ zł. Czy ciąg $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n+30}$ jest zbieżny prawie na pewno? Jeśli tak, podać granicę.

5. Samochód marki X pozostaje w trakcie gwarancji bezawaryjny z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że na 1800 sprzedanych samochodów awarii w trakcie gwarancji ulegnie nie mniej niż 570 i nie więcej niż 640 samochodów (zakładamy niezależność awarii poszczególnych samochodów). Ponadto, wiadomo, iż jeśli samochód ulegnie awarii, koszt naprawy gwarancyjnej jest zmienną losową z rozkładu o średniej 4000 i wariancji 1500^2 (jeśli nie ulegnie awarii, koszty serwisowania wynoszą 0). Obliczyć wartość oczekiwaną całkowitych wydatków firmy związanych z serwisem gwarancyjnym partii 1800 samochodów oraz przybliżyć prawdopodobieństwo, że wydatki te przekroczą 2 400 000. *Wskazówka. Być może nie wszystkie wielkości z formuły w CTG trzeba wyliczyć, aby podać wynik końcowy.*

6. Pewien ośrodek badawczy przeprowadza comiesięczne analizy przepływów na rynku pracy między grupami pracujących, bezrobotnych oraz nieaktywnych zawodowo. Z zebranych danych wynika, że jeśli w danym okresie respondent jest nieaktywny, to w kolejnym okresie pozostanie nieaktywny z prawdopodobieństwem 0,9, zaś z prawdopodobieństwem 0,1 znajdzie pracę. Jeśli w danym okresie respondent jest zatrudniony, to w kolejnym okresie pozostanie zatrudniony z prawdopodobieństwem 0,8, zaś z prawdopodobieństwami 0,1 zostanie bezrobotnym lub zdezaktywizuje się. Jeśli zaś w danym okresie respondent jest bezrobotny, w kolejnym pozostanie bezrobotny z prawdopodobieństwem 0,6, zatrudni się z prawdopodobieństwem 0,3 i stanie się nieaktywny z prawdopodobieństwem 0,1.
   (a) Przy założeniu, że zaobserwowane prawidłowości mają miejsce od dłuższego czasu, wyznaczyć średni odsetek osób pracujących w populacji.
   (b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba nieaktywna zawodowo w styczniu 2015 roku będzie nieaktywna w marcu 2015 roku.
   (c) Pewien respondent stał się nieaktywny zawodowo w styczniu 2015 roku. Wyznaczyć oczekiwaną liczbę miesięcy pozostawania przez niego nieaktywnym.

$\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(1) \approx 0{,}841$, $\Phi(1{,}5) \approx 0{,}933$, $\Phi(2) \approx 0{,}977$, $\Phi(2{,}5) \approx 0{,}994$, $\Phi(3) \approx 0{,}9987$, $\Phi(4) \approx 0{,}99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 30.01.2015
grupa C

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$*pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa C). Czas trwania egzaminu: 120 min.*

1. Gęstość dwuwymiarowego wektora losowego (X,Y) dana jest wzorem $g(x,y)=\frac{1}{3x}1_{\{0<y<x<3\}}$.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   (b) Oblicz $\mathbb{P}(X\leqslant Y)$.

2. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład normalny o średniej $(0,0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Znajdź wariancję zmiennej $X+Y$.
   (b) Czy zmienne $(X+Y)^2$ i X^2 są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!
   (c) Jaki jest rozkład zmiennej $Z=(X+Y)^2+X^2$? Podaj gęstość lub nazwę tego rozkładu.
   (d) Oblicz $\mathbb{E}Z$ i $\mathrm{Var}Z$.

3. Analityk giełdowy zauważył, że dzienna zmiana indeksu giełdy papierów wartościowych, wyrażona w procentach, ma rozkład o gęstości $g(x)=\frac{1}{100}|x|1_{\{-10\leqslant x\leqslant 10\}}$. Ponadto, jeśli w ciągu danego dnia zmiana indeksu wyniosła $x\%$, to wielkość obrotów z tego samego dnia, wyrażona w mld zł, ma rozkład jednostajny na przedziale $[5,|x|+5]$. Niech X i Y oznaczają odpowiednio zmianę indeksu (w %) i obroty (w mld zł) giełdy w dniu 30.01.2015 r.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}Y$.
   (b) Znajdź rozkład wektora (X,Y) oraz rozkład zmiennej Y.

4. Wartości zakupów dokonanych przez klientów w kiosku, X_n, są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 10 zł i odchyleniu standardowym 2,5. Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować prawdopodobieństwo, że utarg na 20 klientach będzie zawierał się w przedziale $(192,208)$ zł. Czy ciąg $\frac{X_1+\cdots+X_n}{2n}$ jest zbieżny prawie na pewno? Jeśli tak, podać granicę.

5. Samochód marki X pozostaje w trakcie gwarancji bezawaryjny z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że na 4800 sprzedanych samochodów awarii w trakcie gwarancji ulegnie nie mniej niż 1170 i nie więcej niż 1245 samochodów (zakładamy niezależność awarii poszczególnych samochodów). Ponadto, wiadomo, iż jeśli samochód ulegnie awarii, koszt naprawy gwarancyjnej jest zmienną losową z rozkładu o średniej 1000 i wariancji 800^2 (jeśli nie ulegnie awarii, koszty serwisowania wynoszą 0). Obliczyć wartość oczekiwaną całkowitych wydatków firmy związanych z serwisem gwarancyjnym partii 4800 samochodów oraz przybliżyć prawdopodobieństwo, że wydatki te przekroczą 1 200 000. *Wskazówka. Być może nie wszystkie wielkości z formuły w CTG trzeba wyliczyć, aby podać wynik końcowy.*

6. Pewien ośrodek badawczy przeprowadza comiesięczne analizy przepływów na rynku pracy między grupami pracujących, bezrobotnych oraz nieaktywnych zawodowo. Z zebranych danych wynika, że jeśli w danym okresie respondent jest nieaktywny, to w kolejnym okresie pozostanie nieaktywny z prawdopodobieństwem 0,7, zaś z prawdopodobieństwem 0,3 znajdzie pracę. Jeśli w danym okresie respondent jest zatrudniony, to w kolejnym okresie pozostanie zatrudniony z prawdopodobieństwem 0,7, z prawdopodobieństwem 0,1 zostanie bezrobotnym i z prawdopodobieństwem 0,2 zdezaktywizuje się. Jeśli zaś w danym okresie respondent jest bezrobotny, w kolejnym pozostanie bezrobotny z prawdopodobieństwem 0,5, zatrudni się z prawdopodobieństwem 0,3 i stanie się nieaktywny z prawdopodobieństwem 0,2.
   (a) Przy założeniu, że zaobserwowane prawidłowości mają miejsce od dłuższego czasu, wyznaczyć średni odsetek osób pracujących w populacji.
   (b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba bezrobotna w styczniu 2015 roku będzie bezrobotna w marcu 2015 roku.
   (c) Pewien respondent stał się bezrobotny w styczniu 2015 roku. Wyznaczyć oczekiwaną liczbę miesięcy pozostawania przez niego bezrobotnym.

$\Phi(0)=0{,}5$, $\Phi(1)\approx 0{,}841$, $\Phi(1{,}5)\approx 0{,}933$, $\Phi(2)\approx 0{,}977$, $\Phi(2{,}5)\approx 0{,}994$, $\Phi(3)\approx 0{,}9987$, $\Phi(4)\approx 0{,}99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 30.01.2015
grupa D

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10pkt$. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa D). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Gęstość dwuwymiarowego wektora losowego (X,Y) dana jest wzorem $g(x,y)=\frac{1}{3y}\mathbb{1}_{\{0<x<y<3\}}$.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   (b) Oblicz $\mathbb{P}(X\leqslant Y)$.

2. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład normalny o średniej $(0,0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Znajdź wariancję zmiennej $X-Y$.
   (b) Czy zmienne X^2 i $(X-Y)^2$ są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!
   (c) Jaki jest rozkład zmiennej $Z=X^2+(X-Y)^2$? Podaj gęstość lub nazwę tego rozkładu.
   (d) Oblicz $\mathbb{E}Z$ i $\mathrm{Var}Z$.

3. Analityk giełdowy zauważył, że dzienna zmiana indeksu giełdy papierów wartościowych, wyrażona w procentach, ma rozkład o gęstości $g(x)=\frac{1}{25}|x|\mathbb{1}_{\{|x|\leqslant 5\}}$. Ponadto, jeśli w ciągu danego dnia zmiana indeksu wyniosła $x\%$, to wielkość obrotów z tego samego dnia, wyrażona w mld zł, ma rozkład jednostajny na przedziale $[5,|x|+5]$. Niech X i Y oznaczają odpowiednio zmianę indeksu (w %) i obroty (w mld zł) giełdy w dniu 30.01.2015 r.
   (a) Oblicz $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}Y$.
   (b) Znajdź rozkład wektora (X,Y) oraz rozkład zmiennej Y.

4. Wartości zakupów dokonanych przez klientów w kiosku, X_n, są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 8 zł i odchyleniu standardowym 2. Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować prawdopodobieństwo, że utarg na 50 klientach będzie zawierał się w przedziale $(380,420)$ zł. Czy ciąg $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n+8}$ jest zbieżny prawie na pewno? Jeśli tak, podać granicę.

5. Samochód marki X pozostaje w trakcie gwarancji bezawaryjny z prawdopodobieństwem $\frac{4}{5}$. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że na 2500 sprzedanych samochodów awarii w trakcie gwarancji ulegnie nie mniej niż 450 i nie więcej niż 530 samochodów (zakładamy niezależność awarii poszczególnych samochodów). Ponadto, wiadomo, iż jeśli samochód ulegnie awarii, koszt naprawy gwarancyjnej jest zmienną losową z rozkładu o średniej 4000 i wariancji 1500^2 (jeśli nie ulegnie awarii, koszty serwisowania wynoszą 0). Obliczyć wartość oczekiwaną całkowitych wydatków firmy związanych z serwisem gwarancyjnym partii 2500 samochodów oraz przybliżyć prawdopodobieństwo, że wydatki te przekroczą $2\,000\,000$. *Wskazówka. Być może nie wszystkie wielkości z formuły w CTG trzeba wyliczyć, aby podać wynik końcowy.*

6. Pewien ośrodek badawczy przeprowadza comiesięczne analizy przepływów na rynku pracy między grupami pracujących, bezrobotnych oraz nieaktywnych zawodowo. Z zebranych danych wynika, że jeśli w danym okresie respondent jest nieaktywny, to w kolejnym okresie pozostanie nieaktywny z prawdopodobieństwem 0,9, zaś z prawdopodobieństwem 0,1 znajdzie pracę. Jeśli w danym okresie respondent jest zatrudniony, to w kolejnym okresie pozostanie zatrudniony z prawdopodobieństwem 0,8, zaś z prawdopodobieństwami 0,1 zostanie bezrobotnym lub zdezaktywizuje się. Jeśli zaś w danym okresie respondent jest bezrobotny, w kolejnym pozostanie bezrobotny z prawdopodobieństwem 0,6, zatrudni się z prawdopodobieństwem 0,3 i stanie się nieaktywny z prawdopodobieństwem 0,1.
   (a) Przy założeniu, że zaobserwowane prawidłowości mają miejsce od dłuższego czasu, wyznaczyć średni odsetek osób bezrobotnych w populacji.
   (b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba bezrobotna w styczniu 2015 roku będzie bezrobotna w marcu 2015 roku.
   (c) Pewien respondent stał się bezrobotny w styczniu 2015 roku. Wyznaczyć oczekiwaną liczbę miesięcy pozostawania przez niego bezrobotnym.

$\Phi(0)=0{,}5$, $\Phi(1)\approx 0{,}841$, $\Phi(1{,}5)\approx 0{,}933$, $\Phi(2)\approx 0{,}977$, $\Phi(2{,}5)\approx 0{,}994$, $\Phi(3)\approx 0{,}9987$, $\Phi(4)\approx 0{,}99997$