Rachunek Prawdopodobieństwa WNE

Egzamin, 3 lutego 2012 r., godz. 9:00, grupa A

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 2, a Y ma rozkład $\Gamma(2,2)$, tzn. $g_Y(y) = 4ye^{-2y}1_{[0,\infty)}(y)$. (2p.) Podać gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y). (6p.) Obliczyć $\mathbb{E}X^2Y$.

2. (7p.) Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 99\}$ losujemy ze zwracaniem trzy liczby. Korzystając z nierówności Czebyszewa, oszacować z góry prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wylosowanych liczb będzie większy niż 500000.

3. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, tzn. rozkład z gęstością $g(x,y) = \frac{1}{2}1_{\{-1\leq y\leq x\leq 1\}}$. (4p.) Wyznaczyć gęstość warunkową $g_{X|Y}$. (5p.) Obliczyć $\mathbb{E}(2XY - 3Y|Y)$.

4. (8p.) Rzucono prawidłową kostką 450 razy. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w co najwyżej 160 rzutach wypadnie piątka lub szóstka.

5. (10p.) Towarzystwo ubezpieczeniowe oferuje trzy typy polis ubezpieczeniowych: za 40 zł, 50 zł oraz 100 zł. Prawdopodobieństwo tego, że klient zainteresowany polisą wybierze pierwszą, drugą bądź trzecią z nich, wynoszą odpowiednio 1/2, 2/5 oraz 1/10. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że za 192 polisy sprzedane w ciągu pierwszego tygodnia towarzystwo zainkasowało ponad 9 tys. zł.

6. Po wierzchołkach trójkąta ABC porusza się pionek, w każdym ruchu pozostając w miejscu z prawdopodobieństwem 1/2 bądź przesuwając się do jednego z pozostałych punktów (każda z tych możliwości ma prawdopodobieństwo 1/4). W chwili początkowej pionek znajduje się w punkcie A. (2p.) Podać macierz przejścia łańcucha Markowa opisującego powyższy proces. (2p.) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po dwóch krokach pionek będzie w punkcie C? (4p.) Wyznaczyć rozkład stacjonarny łańcucha Markowa. (2p.) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 ruchów pionek będzie w punkcie A.

7. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla dowolnego $n \geq 1$, zmienna X_n ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji $1/n$. (2p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $\sqrt{7}X_7$. (2p.) Jaki rozkład ma zmienna $X_1^2+2X_2^2+3X_3^2+\ldots+nX_n^2$? (4p.) Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA WNE

Egzamin, 3 lutego 2012 r., godz. 9:00, grupa B

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład $\Gamma(2,2)$, tzn. $g_X(x) = 4xe^{-2x}1_{[0,\infty)}(x)$, a Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 2. (2p.) Podać gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y). (6p.) Obliczyć $\mathbb{E}XY^2$.

2. (7p.) Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 99\}$ losujemy ze zwracaniem trzy liczby. Korzystając z nierówności Czebyszewa, oszacować z góry prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wylosowanych liczb będzie większy niż 750000.

3. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(-1,1)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, tzn. rozkład z gęstością $g(x,y) = \frac{1}{2}1_{\{-1\leq x\leq y\leq 1\}}$. (4p.) Wyznaczyć gęstość warunkową $g_{Y|X}$. (5p.) Obliczyć $\mathbb{E}(2XY - 3X|X)$.

4. (8p.) Rzucono prawidłową kostką 1800 razy. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w co najmniej 640 rzutach wypadnie dwójka lub trójka.

5. (10p.) Towarzystwo ubezpieczeniowe oferuje trzy typy polis ubezpieczeniowych: za 50 zł, 60 zł oraz 100 zł. Prawdopodobieństwo tego, że klient zainteresowany polisą wybierze pierwszą, drugą bądź trzecią z nich, wynoszą odpowiednio 2/5, 1/2 oraz 1/10. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że za 162 polisy sprzedane w ciągu pierwszego tygodnia towarzystwo zainkasowało mniej niż 9 tys. zł.

6. Po wierzchołkach trójkąta ABC porusza się pionek, w każdym ruchu pozostając w miejscu z prawdopodobieństwem 1/2 bądź przesuwając się do jednego z pozostałych punktów (każda z tych możliwości ma prawdopodobieństwo 1/4). W chwili początkowej pionek znajduje się w punkcie B. (2p.) Podać macierz przejścia łańcucha Markowa opisującego powyższy proces. (2p.) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po dwóch krokach pionek będzie w punkcie A? (4p.) Wyznaczyć rozkład stacjonarny łańcucha Markowa. (2p.) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 ruchów pionek będzie w punkcie B.

7. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla dowolnego $n \geq 1$, zmienna X_n ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji $1/n^2$. (2p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $5X_5$. (2p.) Jaki rozkład ma zmienna $X_1^2+4X_2^2+9X_3^2+\ldots+n^2X_n^2$? (4p.) Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

Rachunek Prawdopodobieństwa WNE

Egzamin, 3 lutego 2012 r., godz. 9:00, grupa C

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 3, a Y ma rozkład $\Gamma(2,3)$, tzn. $g_Y(y) = 9ye^{-3y}1_{[0,\infty)}(y)$. (2p.) Podać gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y). (6p.) Obliczyć $\mathbb{E}X^2Y$.

2. (7p.) Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 99\}$ losujemy ze zwracaniem trzy liczby. Korzystając z nierówności Czebyszewa, oszacować z góry prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wylosowanych liczb będzie większy niż 600000.

3. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, tzn. rozkład z gęstością $g(x,y) = \frac{1}{2}1_{\{-1\leq y\leq x\leq 1\}}$. (4p.) Wyznaczyć gęstość warunkową $g_{Y|X}$. (5p.) Obliczyć $\mathbb{E}(3XY - 2X|X)$.

4. (8p.) Rzucono prawidłową kostką 450 razy. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w co najwyżej 140 rzutach wypadnie jedynka lub dwójka.

5. (10p.) Towarzystwo ubezpieczeniowe oferuje trzy typy polis ubezpieczeniowych: za 40 zł, 50 zł oraz 100 zł. Prawdopodobieństwo tego, że klient zainteresowany polisą wybierze pierwszą, drugą bądź trzecią z nich, wynoszą odpowiednio 1/2, 2/5 oraz 1/10. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że za 192 polisy sprzedane w ciągu pierwszego tygodnia towarzystwo zainkasowało ponad 10 tys. zł.

6. Po wierzchołkach trójkąta ABC porusza się pionek, w każdym ruchu pozostając w miejscu z prawdopodobieństwem 1/2 bądź przesuwając się do jednego z pozostałych punktów (każda z tych możliwości ma prawdopodobieństwo 1/4). W chwili początkowej pionek znajduje się w punkcie C. (2p.) Podać macierz przejścia łańcucha Markowa opisującego powyższy proces. (2p.) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po dwóch krokach pionek będzie w punkcie B? (4p.) Wyznaczyć rozkład stacjonarny łańcucha Markowa. (2p.) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 ruchów pionek będzie w punkcie A.

7. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla dowolnego $n \geq 1$, zmienna X_n ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji $1/n$. (2p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $\sqrt{3}X_3$. (2p.) Jaki rozkład ma zmienna $X_1^2+2X_2^2+3X_3^2+\ldots+nX_n^2$? (4p.) Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

Rachunek Prawdopodobieństwa WNE

Egzamin, 3 lutego 2012 r., godz. 9:00, grupa D

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem oraz numerem indeksu. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład $\Gamma(2,3)$, tzn. $g_X(x) = 9xe^{-3x}1_{[0,\infty)}(x)$, a Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 3. (2p.) Podać gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y). (6p.) Obliczyć $\mathbb{E}XY^2$.

2. (7p.) Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 99\}$ losujemy ze zwracaniem trzy liczby. Korzystając z nierówności Czebyszewa, oszacować z góry prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wylosowanych liczb będzie większy niż 800000.

3. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(-1,1)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, tzn. rozkład z gęstością $g(x,y) = \frac{1}{2}1_{\{-1\leq x\leq y\leq 1\}}$. (4p.) Wyznaczyć gęstość warunkową $g_{X|Y}$. (5p.) Obliczyć $\mathbb{E}(3XY - 2Y|Y)$.

4. (8p.) Rzucono prawidłową kostką 1800 razy. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w co najwyżej 560 rzutach wypadnie czwórka lub piątka.

5. (10p.) Towarzystwo ubezpieczeniowe oferuje trzy typy polis ubezpieczeniowych: za 50 zł, 60 zł oraz 100 zł. Prawdopodobieństwo tego, że klient zainteresowany polisą wybierze pierwszą, drugą bądź trzecią z nich, wynoszą odpowiednio 2/5, 1/2 oraz 1/10. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że za 162 polisy sprzedane w ciągu pierwszego tygodnia towarzystwo zainkasowało ponad 10800 zł.

6. Po wierzchołkach trójkąta ABC porusza się pionek, w każdym ruchu pozostając w miejscu z prawdopodobieństwem 1/2 bądź przesuwając się do jednego z pozostałych punktów (każda z tych możliwości ma prawdopodobieństwo 1/4). W chwili początkowej pionek znajduje się w punkcie A. (2p.) Podać macierz przejścia łańcucha Markowa opisującego powyższy proces. (2p.) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po dwóch krokach pionek będzie w punkcie B? (4p.) Wyznaczyć rozkład stacjonarny łańcucha Markowa. (2p.) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że po 1000 ruchów pionek będzie w punkcie B.

7. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne, przy czym dla dowolnego $n \geq 1$, zmienna X_n ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji $1/n^2$. (2p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $6X_6$. (2p.) Jaki rozkład ma zmienna $X_1^2+4X_2^2+9X_3^2+\ldots+n^2X_n^2$? (4p.) Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.