



Mikroekonomia A.5



Maciej Wilamowski

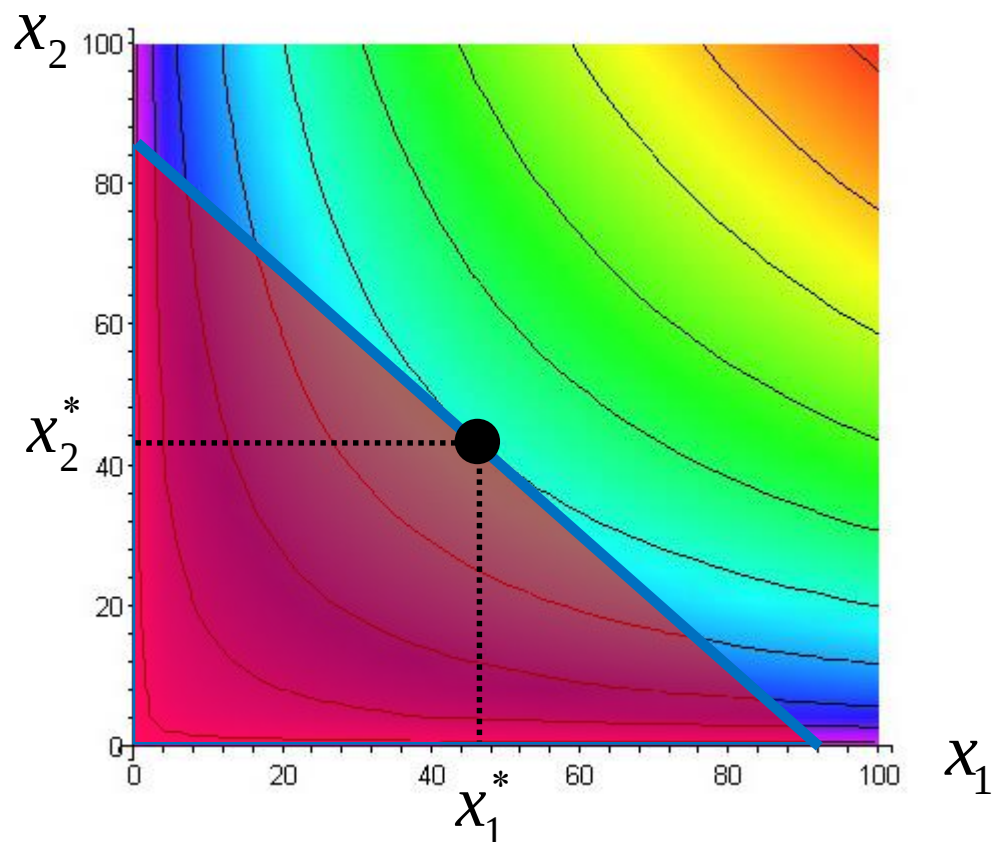
Wybór

- ▶ W jaki sposób konsument dokonuje wyboru?
 - ▶ Możliwości konsumpcyjne obrazuje zbiór konsumpcyjny i zbiór budżetowy
 - ▶ Zadowolenie z poszczególnych koszyków mierzy funkcja użyteczności, a obrazuje krzywa obojętności
 - ▶ Konsument wybiera dostępny koszyk, który daje mu najwyższą użyteczność (znajduje się na 'najwyższej' krzywej obojętności)



Wybór

- Koszyk dający najwyższą użyteczność spośród zbioru budżetowego



Wybór

- ▶ **Ilości dóbr, które konsument maksymalizujący użyteczność wybiera – jego *popyt*** (zwyczajny, rynkowy, Walrasowski, Marshallowski)
- ▶ Dla określonej funkcji użyteczności popyt będzie zależał od ograniczenia budżetowego
 - ▶ Popyt funkcją cen i dochodu konsumenta
 - ▶ Np. dla dwóch dóbr $x_1^*(p_1, p_2, m)$, $x_2^*(p_1, p_2, m)$



Wybór

- ▶ Jeśli $x_1^* > 0$ i $x_2^* > 0$ to koszyk na który konsument zgłasza zapotrzebowanie (popyt) jest *wewnętrzny*
 - ▶ Lub *rozwiązanie wewnętrzne*
- ▶ Jeśli w optimum ilość jednego z dóbr $= 0$
 - ▶ *Rozwiązanie brzegowe*
- ▶ Zakłada się, że popyt zgłaszany przez konsumenta (optimalny koszyk) zwykle spełnia tzw. *prawo Walrasa*
 - ▶ Konsument wydaje cały dochód na optimalny koszyk



Wykorzystanie dostępnego budżetu

- ▶ Co najmniej jedno dobro jest pożądane
 - ▶ mają dodatni wpływ na użyteczność
 - ▶ gdy jedno z dwóch dóbr jest „złe” problem wyboru staje się oczywisty
- ▶ Pieniądza same w sobie nie dają użyteczności
 - ▶ dowolne wykorzystanie pozostałych pieniędzy zwiększa użyteczność
- ▶ Dostępny dochód nie musi być tożsamy ze wszystkimi posiadanymi pieniędzmi
- ▶ Możliwa analiza w której de facto nie wykorzystujemy całego budżetu
 - ▶ Użyteczność quasi-liniowa dla dwóch dóbr, gdzie drugie dobro to środki pozostałe do wykorzystania na inne potrzeby



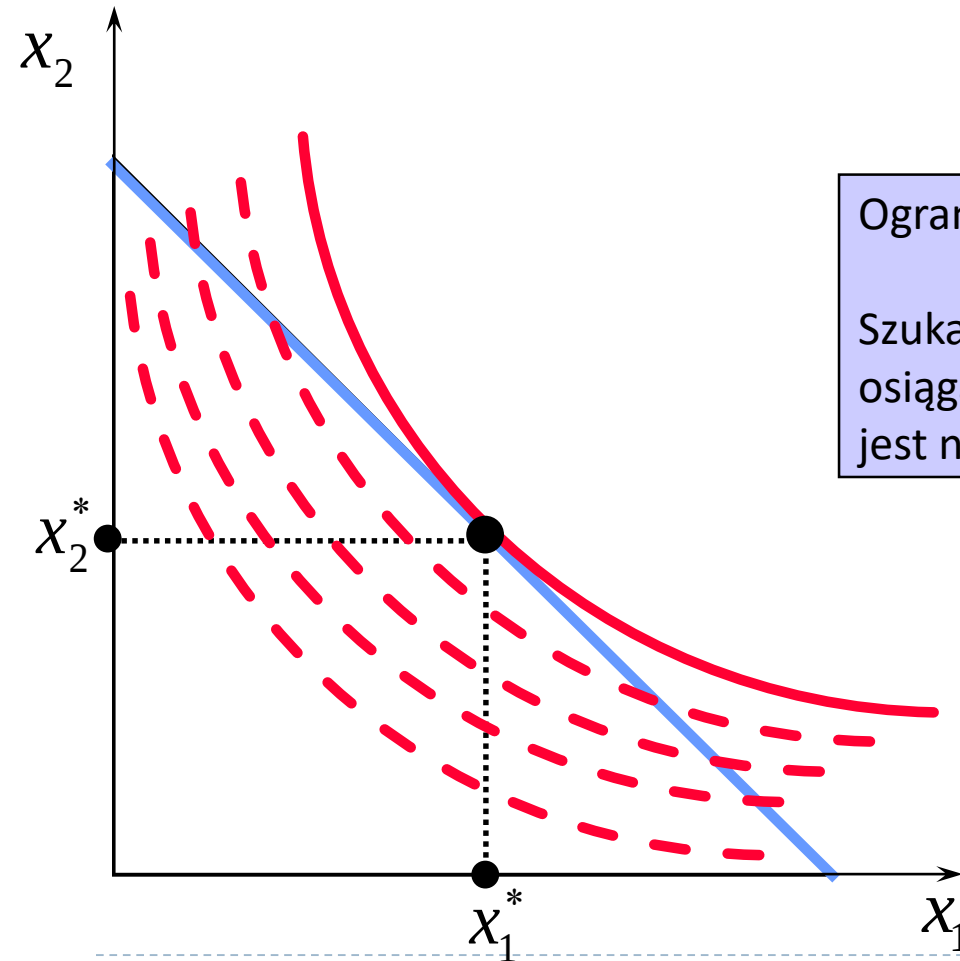
Rozwiązanie optymalne

- ▶ Zrozumienie rozwiązania graficznego
 - ▶ Ograniczenie budżetowe jest nieruchome
 - ▶ Moim celem jest jak najwyższa użyteczność – możliwe najdalsza krzywa obojętności od początku układu współrzędnych
 - ▶ Wybrany przeze mnie koszyk musi być osiągalny
 - ▶ Możemy sobie wyobrazić, że wypychamy (przesuwamy w prawo i do góry) krzywą obojętności tak wysoko jak to możliwe, aby chociaż jeden z punktów na krzywej był osiągalny



Rozwiązanie optymalne

► Zrozumienie rozwiązania graficznego

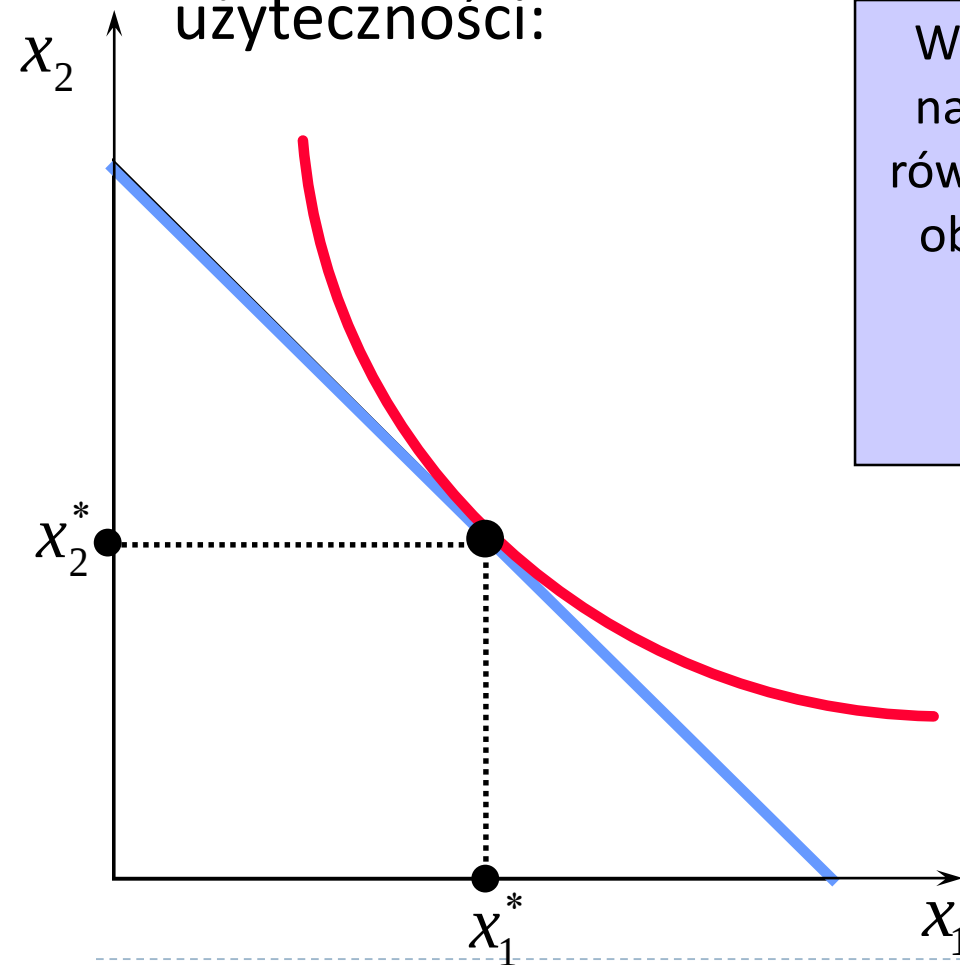


Ograniczenie budżetowe jest stałe i niezmiennie.

Szukamy krzywej obojętności, która jest osiągalna i daje najwyższy poziom użyteczności – jest najbardziej preferowana.

Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- Dla rozwiązania wewnętrznego i różniczkowalnej funkcji użyteczności:



W punkcie optymalnym
nachylenie linii budżetu
równe nachyleniu krzywej
obojętności (styczność)

$$-\frac{p_1}{p_2} = MRS_{x_1 x_2}$$

Konsument wydaje swój
cały dochód

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

► Formalnie :

- (przykład dla 2 zmiennych, analogicznie dla większej ilości dóbr)
- Funkcja użyteczności: $U = f(x_1, x_2)$
- Ograniczenie budżetowe: $p_1x_1 + p_2x_2 = m$
- Konsument maksymalizuje użyteczność przy ograniczeniu budżetowym
- Metoda mnożników Lagrange'a:
- $\mathcal{L} = f(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$
- Gdzie p_1, p_2, m – dane (stałe)
- λ – mnożnik Lagrange'a (jak zmienia się funkcja celu, jeśli pozwolić na zmianę ograniczenia – krańcowa użyteczność dochodu)



Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

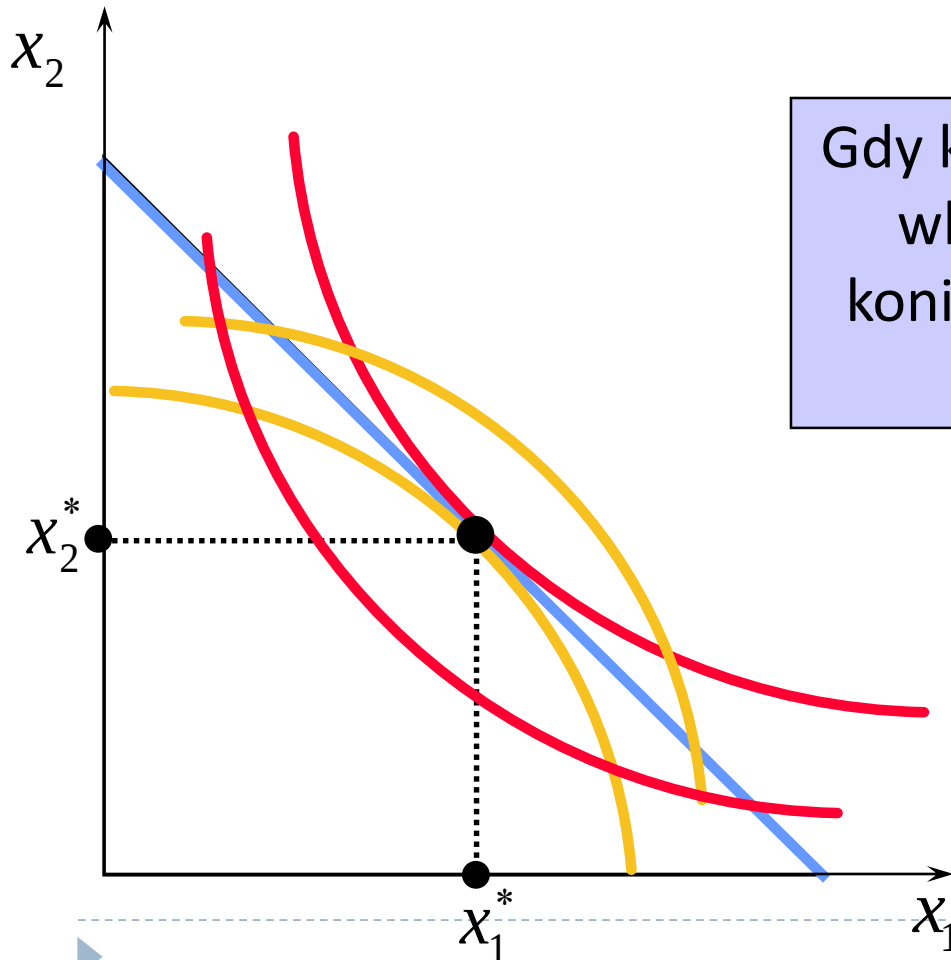
- ▶ Funkcja celu: $\mathcal{L} = f(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$
- ▶ Warunki konieczne (pierwszego rzędu):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda p_1 \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MRS_{x_1 x_2} = -\frac{p_1}{p_2} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0 \end{cases}$$

Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- ▶ Warunki konieczne są wystarczające, gdy preferencje wypukłe (krzywe obojętności wypukłe, funkcja użyteczności wklęsła)

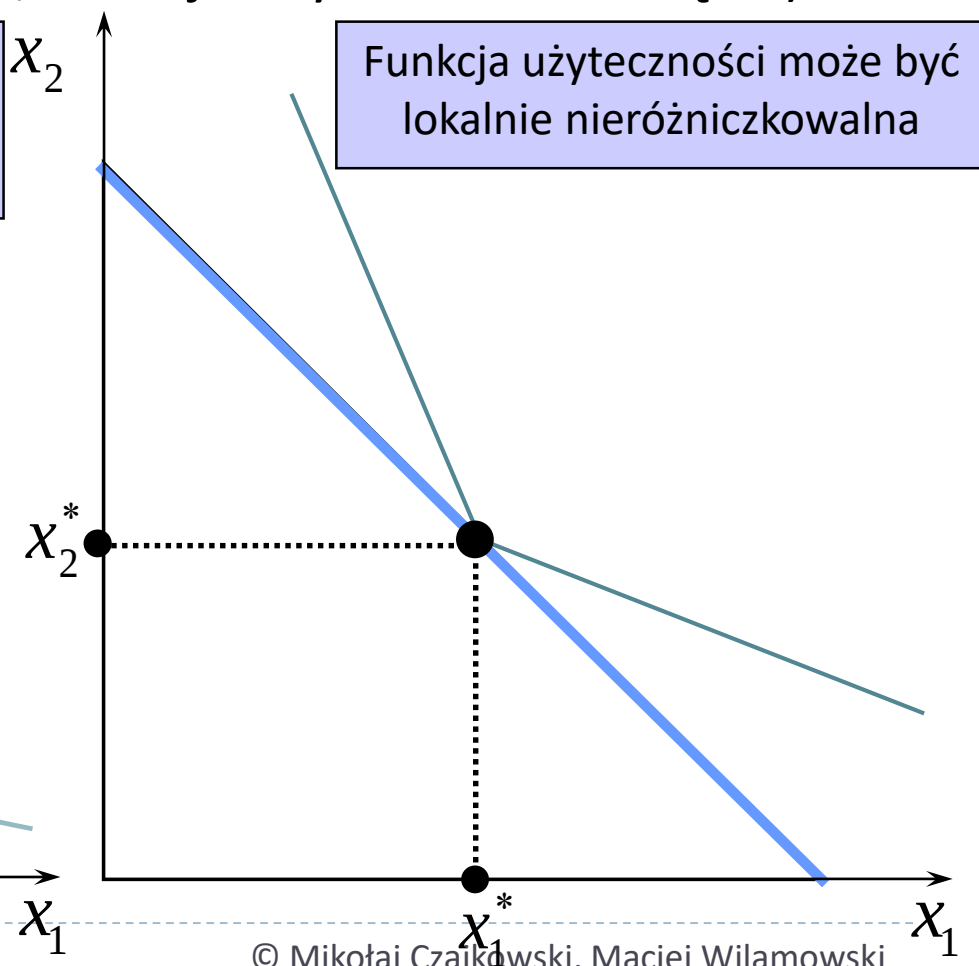
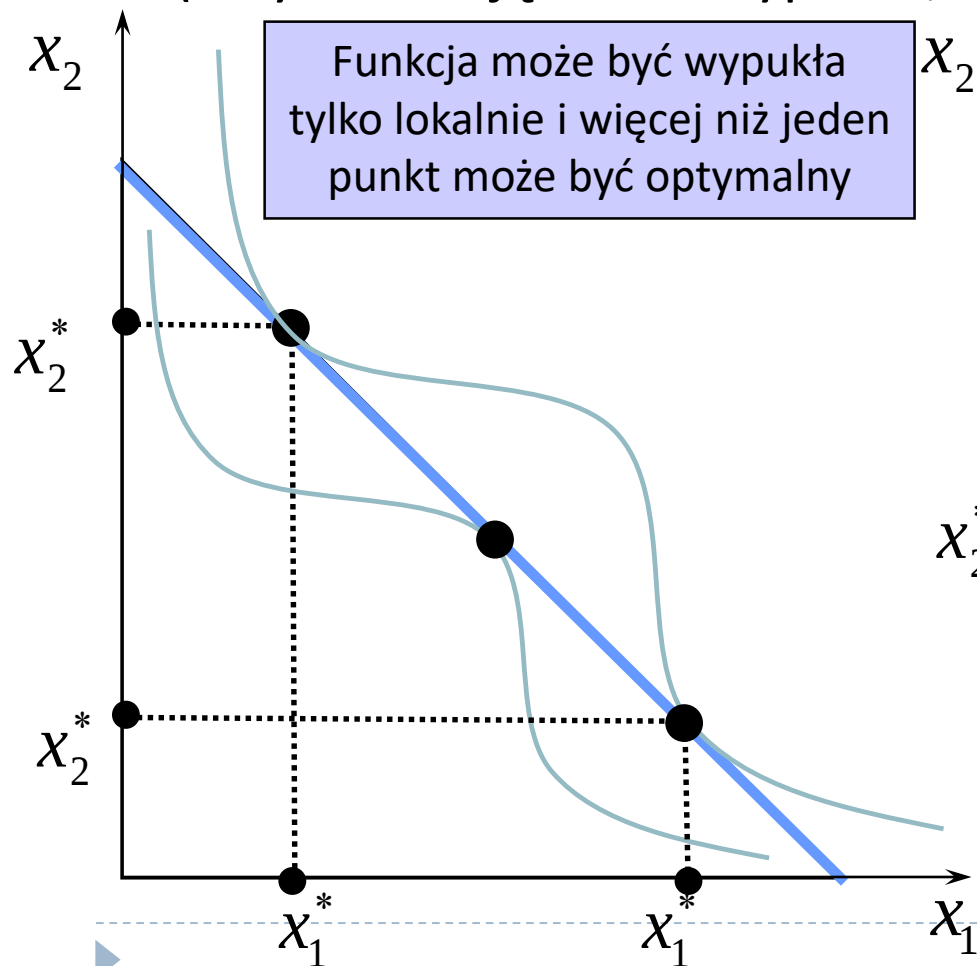


Gdy krzywa obojętności
wklęsła – warunki
konieczne wyznaczają
minimum

Gdy krzywa obojętności
ściśle wklęsła – tylko
jedno rozwiązanie

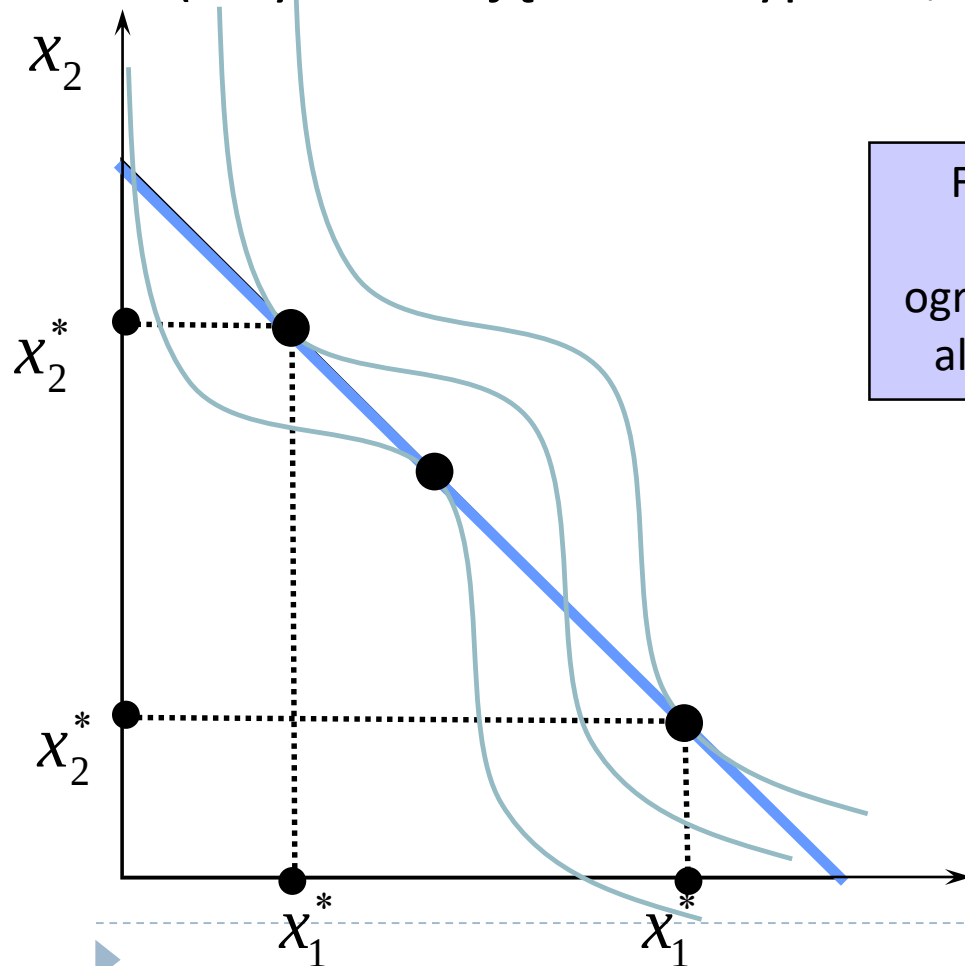
Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- Warunki konieczne są wystarczające, gdy preferencje wypukłe (krzywe obojętności wypukłe, funkcja użyteczności wklęsła)



Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- ▶ Warunki konieczne są wystarczające, gdy preferencje wypukłe (krzywe obojętności wypukłe, funkcja użyteczności wklęsła)



Funkcja może być wypukła tylko lokalnie i krzywe obojętności mogą stykać się z ograniczeniem budżetowym w kilku punktach, ale tylko jedno rozwiązanie jest optymalne.

Rozwiązanie optymalne

- ▶ Zrozumienie rozwiązania analitycznego

- ▶ Jak dochodzimy do poniższego równania, kiedy to możliwe?

$$\frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

- ▶ Co oznacza porównywanie dwóch poniższych wyrażeń?

$$\frac{MU_{x_1}}{p_1} \quad ? \quad \frac{MU_{x_2}}{p_2}$$



Rozwiązanie optymalne

► Zrozumienie rozwiązania analitycznego

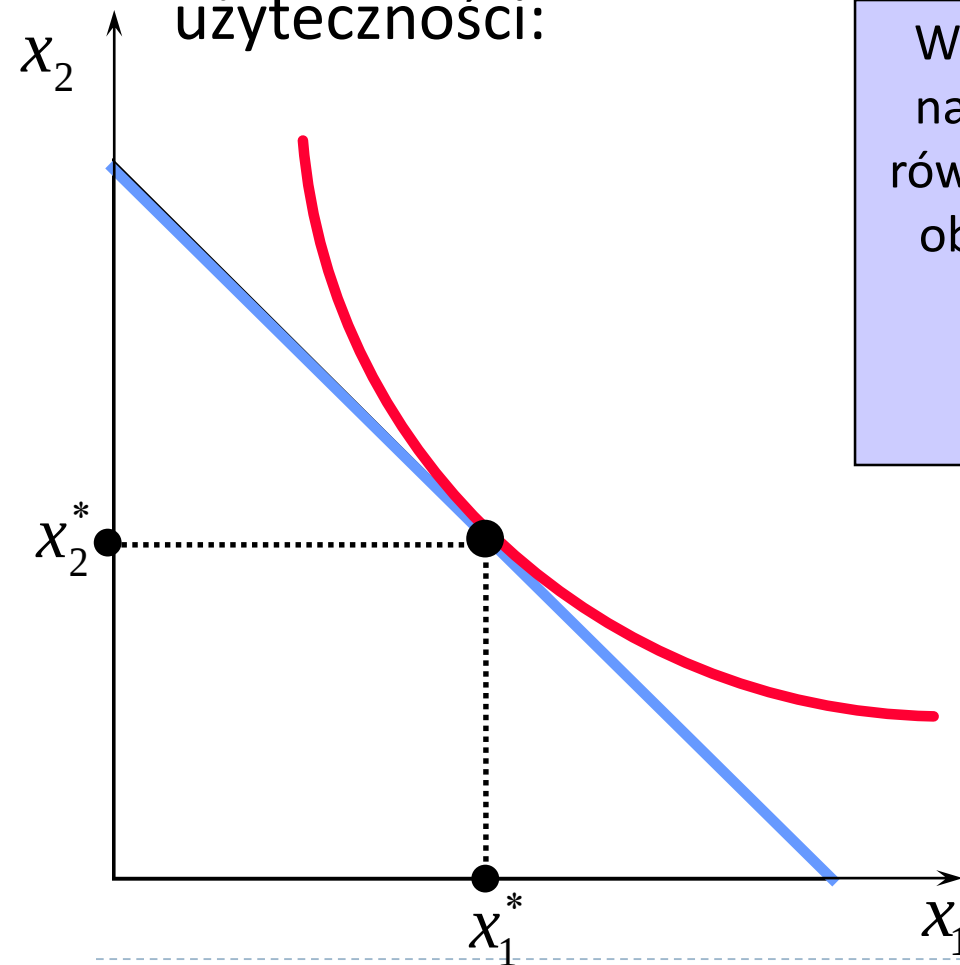
- Wybieram dowolny punkt na ograniczeniu budżetowym, które jest zawsze stałe i niezmiennie niezależnie od dokonanego wyboru
- Poruszam się po ograniczeniu budżetowym tak długo aż jest to dla mnie opłacalne, zgodnie z kierunkiem wyrażonym przez porównanie wielkości użyteczności krańcowej „na złotówkę”
- Alternatywnie rozpoczynam od punktu (0,0) i decyduję się na dokupienie kolejnej jednostki tak długo jak jeszcze mam dochód od dyspozycji. Dokupuję jednostkę tego dobra, które krańcowo daje mi większą użyteczność w przeliczeniu na złotówkę

$$\frac{MU_{x_1}}{p_1} \quad ? \quad \frac{MU_{x_2}}{p_2}$$



Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- Dla rozwiązania wewnętrznego i różniczkowalnej funkcji użyteczności:



W punkcie optymalnym
nachylenie linii budżetu
równe nachyleniu krzywej
obojętności (styczność)

$$-\frac{p_1}{p_2} = MRS_{x_1 x_2}$$

Konsument wydaje swój
cały dochód

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- ▶ Przykład – dla funkcji użyteczności Cobba-Douglasa

- ▶ $U(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$
- ▶ (zawsze rozwiązanie wewnętrzne)
- ▶ Ceny dóbr p_1, p_2
- ▶ Dochód m

- ▶ Wtedy:

- ▶ 1.
$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{p_1}{p_2} &= MRS_{x_1 x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} / \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta}{A\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}} = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \end{aligned} \right.$$
- ▶ 2.
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$



Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- ▶ Przykład – dla funkcji użyteczności Cobba-Douglasa – c.d.

$$\begin{cases} \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{p_1}{p_2} \frac{\beta}{\alpha} x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{p_2}{p_1} \frac{\alpha}{\beta} x_2$$

$\Downarrow$

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{p_1}{p_2} \frac{\beta}{\alpha} x_1 = m \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{m}{p_1}$$

$$p_1 \frac{p_2}{p_1} \frac{\alpha}{\beta} x_2 + p_2 x_2 = m \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{m}{p_2}$$



Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- ▶ Przykład – dla funkcji użyteczności Cobba-Douglasa – c.d.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{m}{p_1} \\ x_2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{m}{p_2} \end{cases}$$

- ▶ A więc dla funkcji Cobba-Douglasa udział wydatków na każde dobro równy stosunkowi wykładnika przy danym dobru (w funkcji użyteczności do sumy) do sumy wykładników

$$\frac{p_1 x_1}{m} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad , \quad \frac{p_2 x_2}{m} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

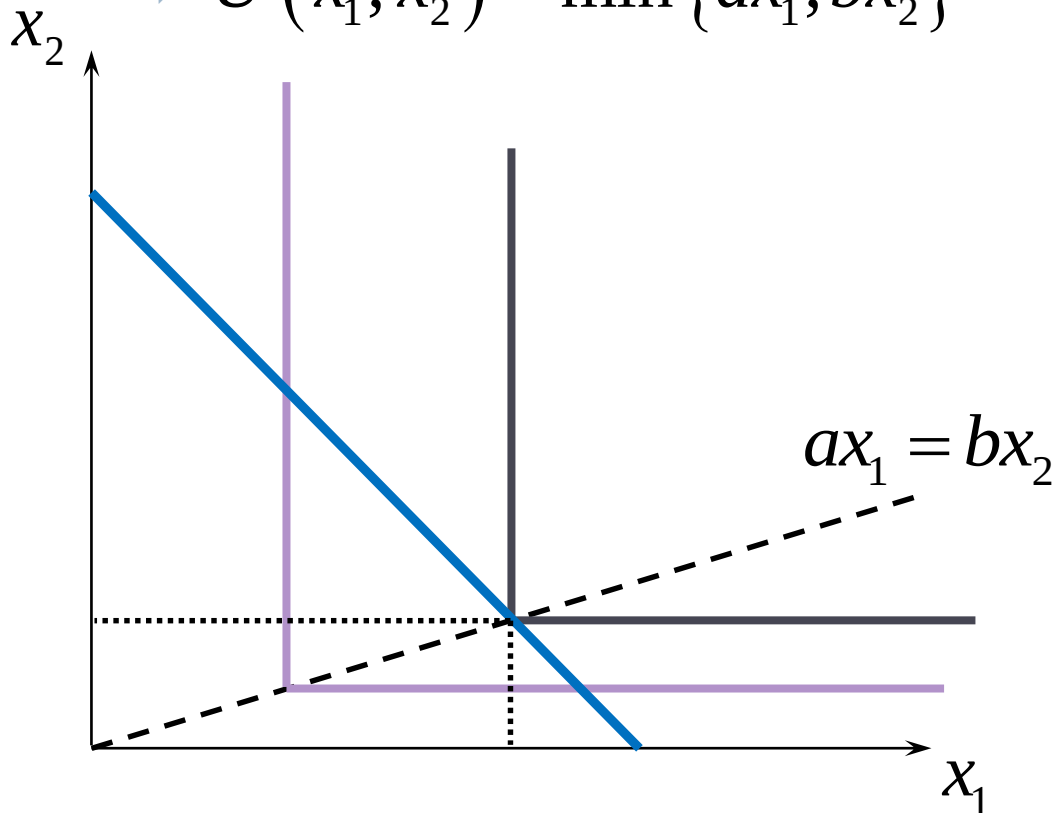


Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- ▶ Dla dóbr doskonale komplementarnych:

- ▶ Funkcja użyteczności nieróżniczkowalna

- ▶ $U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$



Jeśli ceny obu dóbr > 0
rozwiązanie optymalne
na 'wierzchołku'

$$ax_1 = bx_2$$

Konsument wydaje
swoj cały dochód

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

Wybór – rozwiązanie wewnętrzne

- ▶ Przykład – dla funkcji użyteczności: $U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$

$$\begin{cases} ax_1 = bx_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases} \quad \Rightarrow x_2 = \frac{a}{b}x_1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{b}{a}x_2$$

$\Downarrow$

$$p_1x_1 + p_2\frac{a}{b}x_1 = m \quad \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1 + p_2\frac{a}{b}}$$

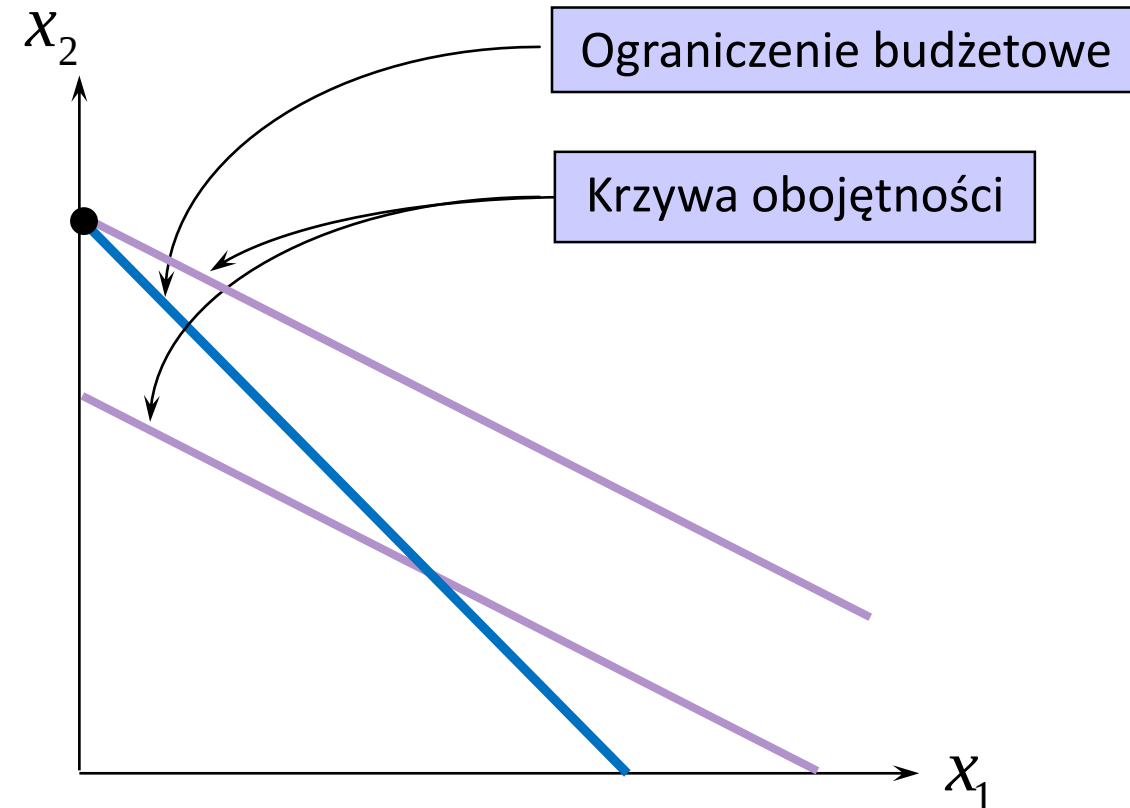
$$p_1\frac{b}{a}x_2 + p_2x_2 = m \quad \Rightarrow x_2 = \frac{m}{p_1\frac{b}{a} + p_2}$$



Wybór – rozwiązanie brzegowe

► Dla dóbr doskonale substytucyjnych:

► $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$



Maksymalna osiągalna
krzywa obojętności
implikuje rozwiązanie
brzegowe

$$x_1^* = 0 \vee x_2^* = 0$$

Wybór – rozwiązanie brzegowe

- ▶ Dla dóbr doskonale substytucyjnych:
 - ▶ Które dobro wybierze konsument?
 - ▶ Dla rozwiązania wewnętrznego spełnione było:

$$-MRS_{x_1x_2} = \frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{MU_{x_1}}{p_1} = \frac{MU_{x_2}}{p_2}$$

- ▶ Teraz opłaca się kupić to dobro, które daje większą użyteczność z jednostki w stosunku do ceny

$$\frac{MU_{x_1}}{p_1} \quad ? \quad \frac{MU_{x_2}}{p_2}$$

Wybór – rozwiązanie brzegowe

► Dla dóbr doskonale substytucyjnych:

- Np. dwa dobra, które kosztują tyle samo $p_1 = p_2 = 1$
- A krańcowe użyteczności: $MU_{x_1} = 5$ i $MU_{x_2} = 10$
- => opłaca się kupić to, które daje wyższą użyteczność za tę samą cenę

$$\frac{MU_{x_1}}{p_1} = \frac{5}{1} < \frac{10}{1} = \frac{MU_{x_2}}{p_2} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}$$

- Np. dwa dobra, które kosztują $p_1 = 5$ i $p_2 = 10$
- A krańcowe użyteczności takie same $MU_{x_1} = MU_{x_2} = 1$
- => opłaca się kupić to, które daje wyższą użyteczność za tę samą cenę

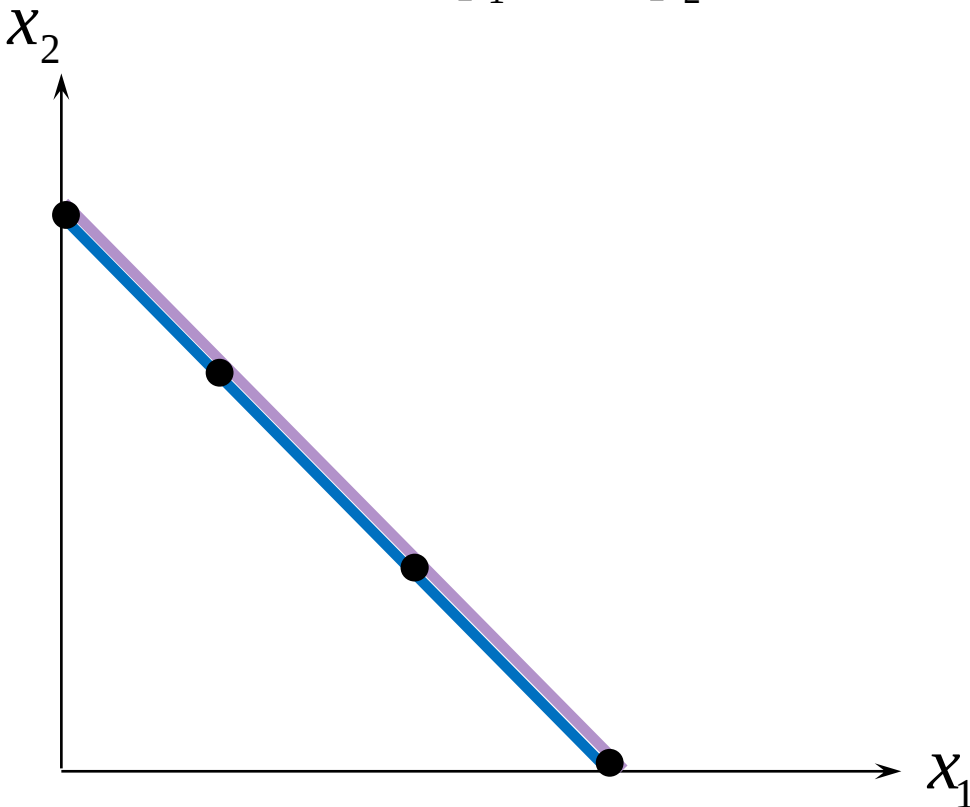
$$\frac{MU_{x_1}}{p_1} = \frac{1}{5} > \frac{1}{10} = \frac{MU_{x_2}}{p_2} \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1}, x_2 = 0$$



Wybór – rozwiązanie brzegowe

► Dla dóbr doskonale substytucyjnych:

► Co jeśli $\frac{MU_{x_1}}{p_1} = \frac{MU_{x_2}}{p_2}$? $\Rightarrow \frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = -MRS_{x_1 x_2} = \frac{p_1}{p_2}$



Ograniczenie budżetowe
równoległe do krzywej
obojętności

Każdy koszyk na linii budżetu
kosztuje tyle samo i daje tak
samo dużą użyteczność
(maksymalną możliwą)

Nie ma znaczenia który
punkt wybierze
konsument

Wybór – rozwiązanie brzegowe

- ▶ Przykład – dla funkcji użyteczności: $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

- ▶ Sprawdzamy, które dobro opłaca się kupować:

$$\max \left\{ \frac{MU_{x_1}}{p_1}, \frac{MU_{x_2}}{p_2} \right\}$$

- ▶ I wydajemy na nie cały dochód $p_1x_1 + p_2x_2 = m$

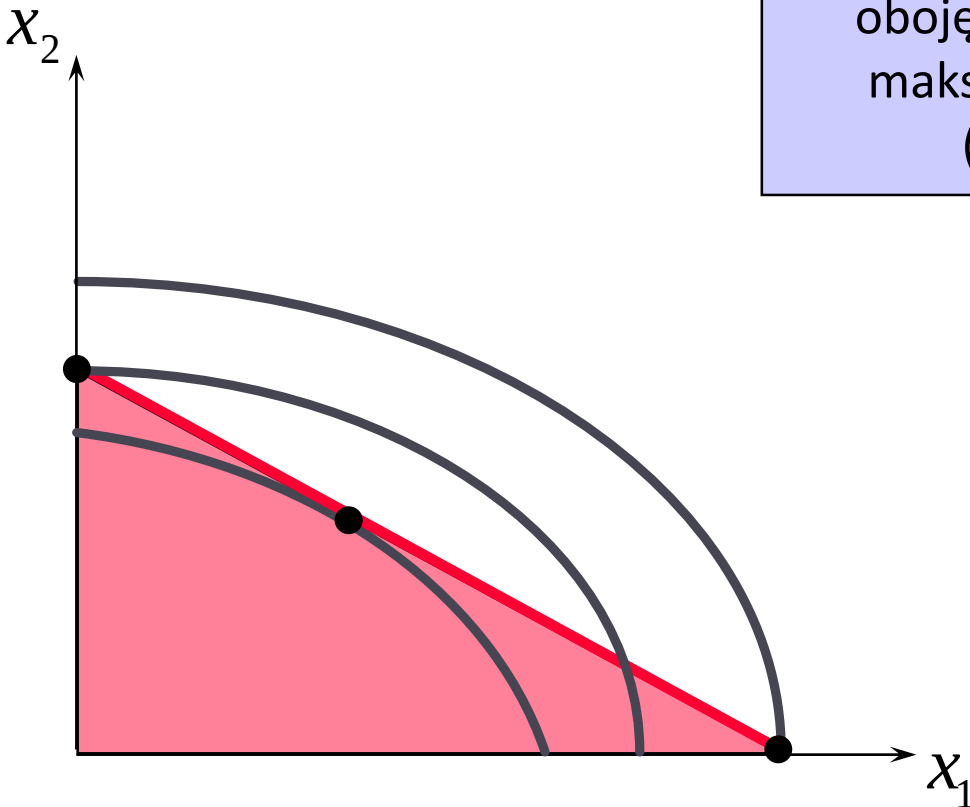
- ▶ Popyty:
$$\begin{cases} (x_1, x_2) = \left(\frac{m}{p_1}, 0 \right) & \text{dla } \frac{MU_{x_1}}{p_1} > \frac{MU_{x_2}}{p_2} \\ (x_1, x_2) = \left(0, \frac{m}{p_2} \right) & \text{dla } \frac{MU_{x_1}}{p_1} < \frac{MU_{x_2}}{p_2} \\ px_1 + px_2 = m & \text{dla } \frac{MU_{x_1}}{p_1} = \frac{MU_{x_2}}{p_2} \end{cases}$$

Wybór – rozwiązanie brzegowe

- Dla wklęsłych krzywych obojętności:

Styczność linii budżetu i krzywej obojętności nie wyznacza maksimum użyteczności (lecz minimum)

Rozwiązaniem – jedno z rozwiązań brzegowych

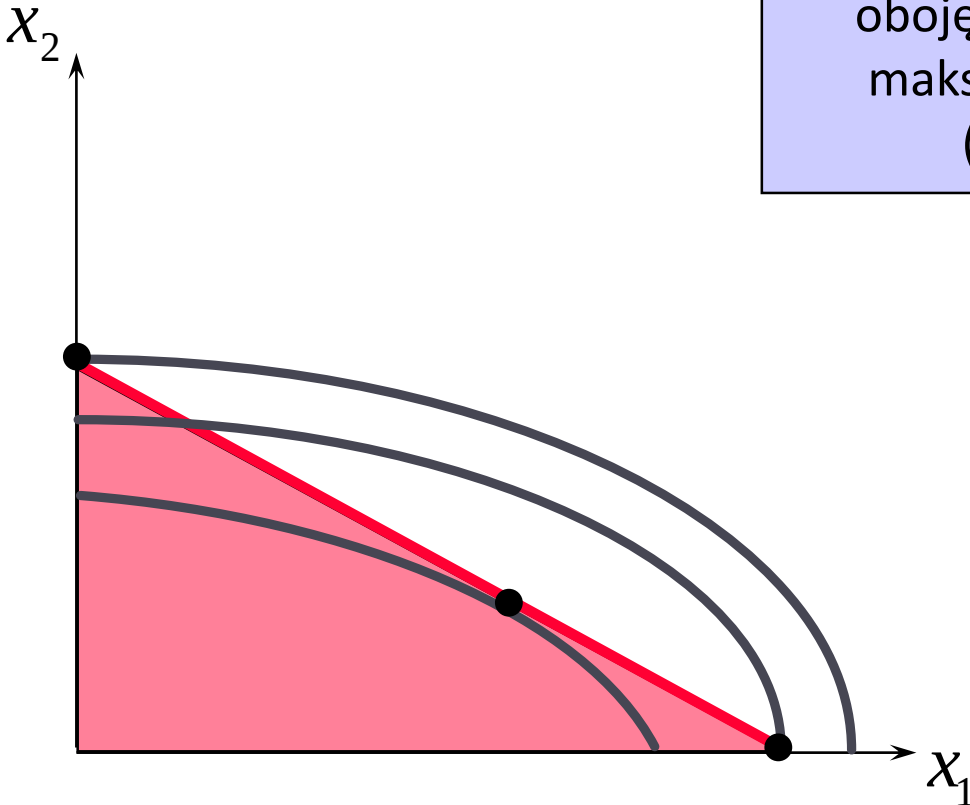


Wybór – rozwiązanie brzegowe

- Dla wklęsłych krzywych obojętności:

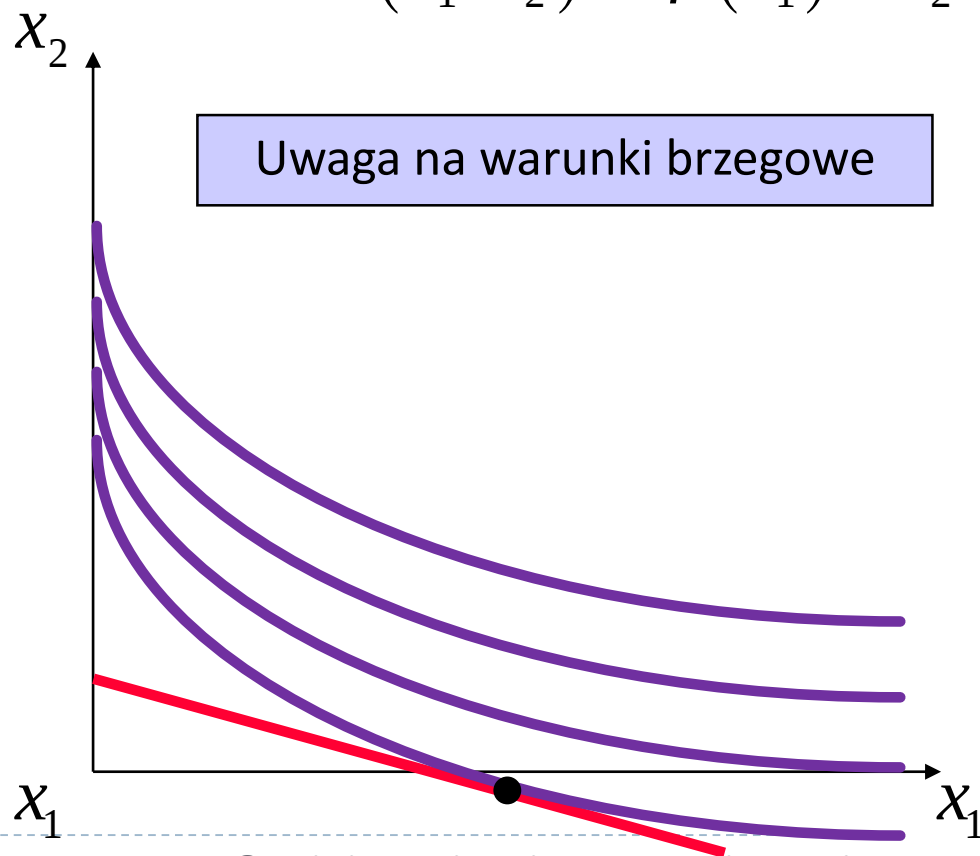
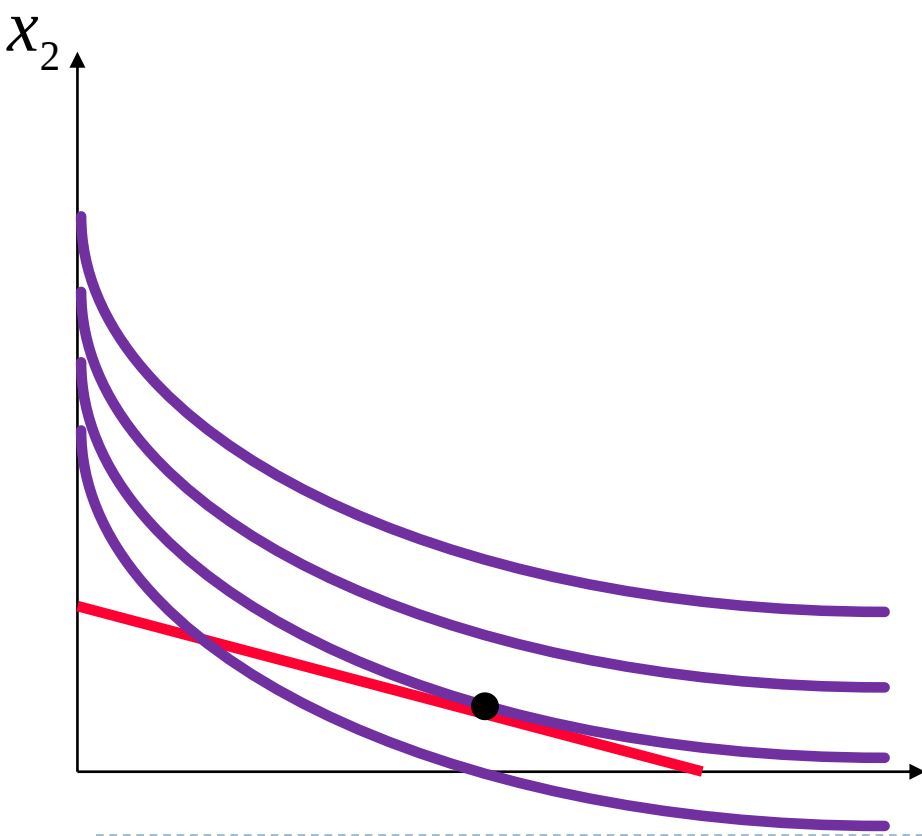
Styczność linii budżetu i krzywej obojętności nie wyznacza maksimum użyteczności (lecz minimum)

Rozwiązaniem – jedno z rozwiązań brzegowych



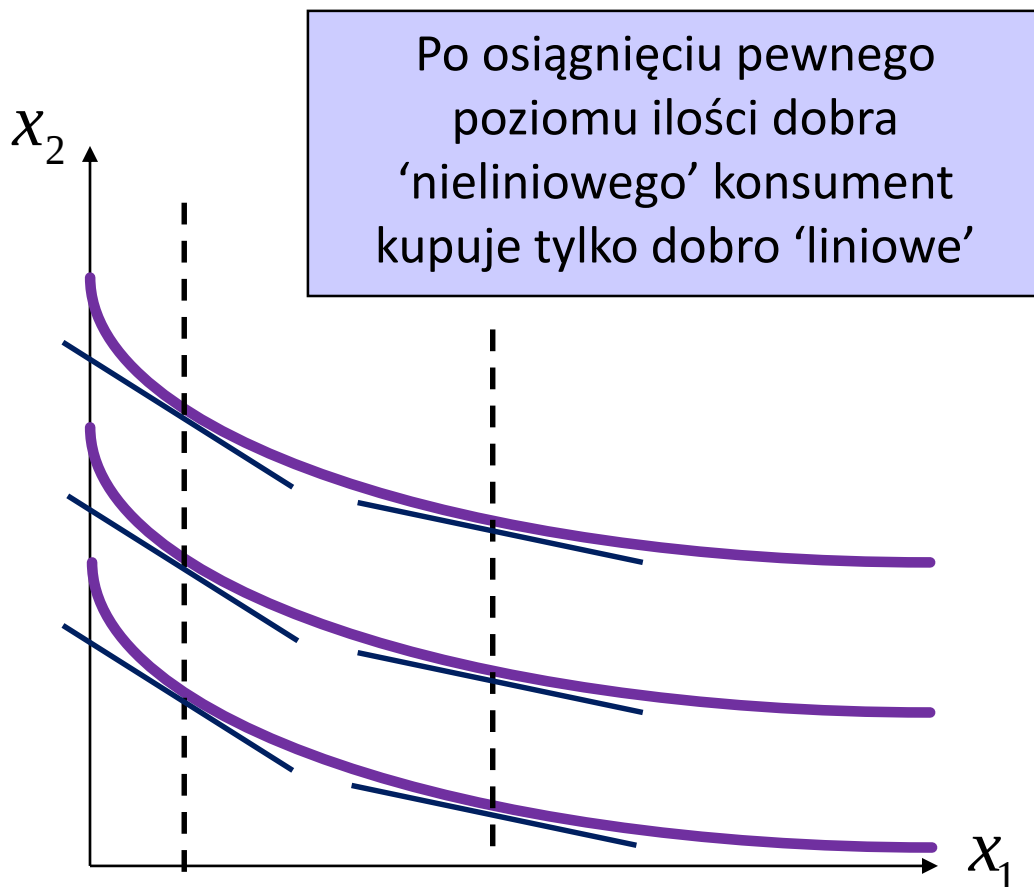
Wybór – rozwiązanie brzegowe

- ▶ Rozwiązania brzegowe możliwe także dla wypukłych preferencji (krzywych obojętności)
 - ▶ Np. dla quasi-liniowych funkcji użyteczności $U(x_1, x_2) = f(x_1) + x_2$



Wybór – quasi-liniowe funkcje użyteczności

- ▶ Dla quasi-liniowych, wypukłych krzywych obojętności popyt na dobro 'nieliniowe' nie zależy od poziomu dochodu (od pewnego poziomu)



Konsument wybiera dobro porównując

$$\frac{MU_{x_1}}{p_1} \quad ? \quad \frac{MU_{x_2}}{p_2}$$

Dla dobra 'nieliniowego' MU spada z każdą kupioną jednostką i w końcu staje się mniejsze niż stała MU dobra 'liniowego'

Przeanalizuj sytuację dla dochodu rosnącego od zera ...

Optymalny wybór – w zadaniach

▶ Optymalny wybór w zadaniach:

- ▶ Dla funkcji użyteczności Cobba-Douglasa i podobnych – rozwiązanie wewnętrzne
- ▶ Dla dóbr doskonale komplementarnych – obie strony minimum równe
- ▶ Dla dóbr doskonale substytucyjnych – rozwiązanie brzegowe
- ▶ Dla innych funkcji*:
 - ▶ Czy warunki konieczne są wystarczające?
 - ▶ Możliwe rozwiązania brzegowe
 - ▶ Twierdzenie Kuhna-Tuckera



Optymalny wybór – w zadaniach

► Zadanie 1:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{0,7} x_2^{0,4}, \quad m = 120, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2$$

$$\begin{cases} \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{0,7 x_2}{0,4 x_1} \\ 3x_1 + 2x_2 = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{7} x_1 = x_2 \\ 3x_1 + 2(\frac{6}{7} x_1) = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 25,455 \\ x_2 = 21,818 \end{cases}$$



Optymalny wybór – w zadaniach

► Zadanie 2:

$$U(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2, \quad m = 90, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 5$$

$$\frac{MU_{x_1}}{p_1} \stackrel{?}{>} \frac{MU_{x_2}}{p_2} \quad \frac{3}{2} > \frac{5}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{90}{2} = 45, \quad x_2 = 0$$

► Zadanie 2a:

$$U(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2, \quad m = 90, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 4$$

$$\frac{MU_{x_1}}{p_1} \stackrel{?}{<} \frac{MU_{x_2}}{p_2} \quad \frac{3}{3} < \frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{90}{4} = 22,5$$

Optymalny wybór – w zadaniach

► Zadanie 3:

$$U(x_1, x_2) = 16x_1^{0,5} + 0,5x_2, \quad m = 180, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1$$

$$\begin{cases} \frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{1} = \frac{16(0,5)x_1^{-0,5}}{0,5} \\ 2x_1 + 1x_2 = 180 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 64 \\ x_2 = 52 \end{cases}$$

► Jakie rozwiązanie, jeżeli $m = 120$?



Praktyczny podejście do optymalizacji

▶ Nic nie zastąpi myślenia i zrozumienia

- ▶ Wartości, 0, ujemne oraz + lub – nieskończoność sugerują rozwiązanie brzegowe
- ▶ Wypukłość preferencji często jest dla nas oczywista bez liczenia (dzięki obyciu z różnymi typami funkcji użyteczności)
- ▶ Rozwiązanie brzegowe łatwiej jest wymyślić niż policzyć

▶ Nic nie zastąpi warsztatu matematycznego

- ▶ Metoda optymalizacji z ograniczeniami Lagrange'a jest pomocna, ale nie niezbędna!
- ▶ Zoptymalizujemy wybór konsumenta dla funkcji CD korzystając tylko z pochodnej funkcji jednej zmiennej!

Praca samodzielna

- ▶ Literatura
 - ▶ Varian: Popyt

