



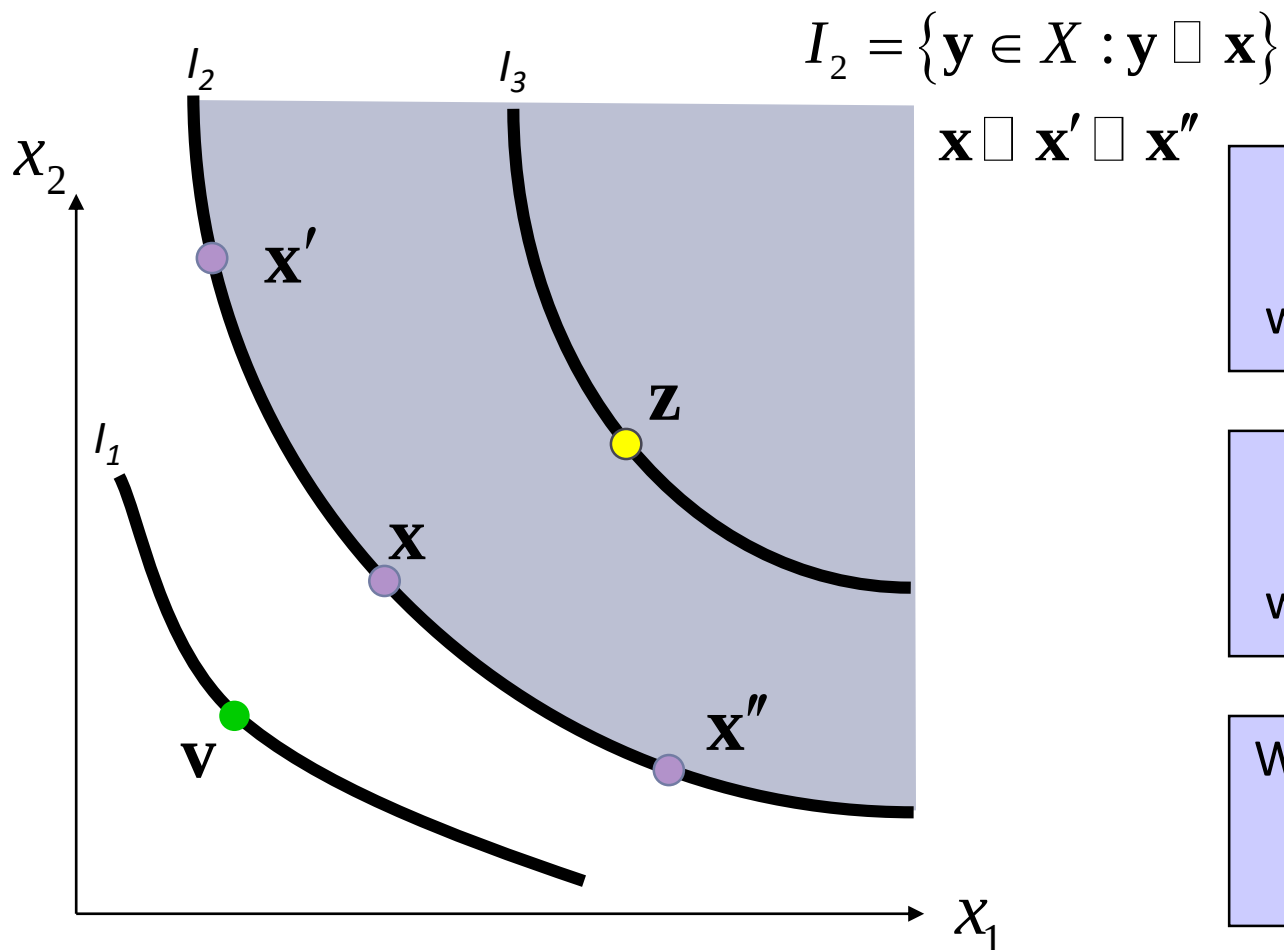
Mikroekonomia A.4



Maciej Wilamowski

Krzywe obojętności - przypomnienie

- Czy potrafimy danej krzywej obojętności przypisać liczbę?



Wszystkie koszyki na I_3
ściśle preferowane
względem koszyków na I_2

Wszystkie koszyki na I_2
ściśle preferowane
względem koszyków na I_1

Wszystkie koszyki powyżej
krzywej obojętności –
ściśle preferowane

Liczby porządkowe i kardynalne

- ▶ Pojęcia matematyczne, pochodzące z teorii zbiorów
- ▶ Liczby **kardynalne**
 - ▶ Mówią o liczbie elementów w zbiorze
 - ▶ Możemy je dodawać, mnożyć, potęgować, ...
- ▶ Liczby **porządkowe**
 - ▶ Mówią wyłącznie o porządku (kolejności) elementów w zbiorze
 - ▶ Porządku nie możemy dodawać ani mnożyć
 - ▶ Informacja o tym, że coś jest drugą największą wartością w zbiorze nie mówi nam nic o samej wartości
 - ▶ Jak układanie kolejnych warstw lub szczebli na drabinie



Funkcja użyteczności

- ▶ Jeśli preferencje są **racjonalne i ciągłe** – mogą zostać opisane za pomocą funkcji użyteczności
- ▶ Funkcja użyteczności to funkcja, która spełnia warunki:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) < U(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x} \square \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{y})$$

- ▶ Funkcja użyteczności jest funkcją **porządkową**:
 - ▶ $U(\mathbf{x}) = 6$ i $U(\mathbf{y}) = 2$ to $\mathbf{x}$ jest ściśle preferowany względem $\mathbf{y}$, ale niekoniecznie trzy razy bardziej
- ▶ Wartości funkcji nazywamy poziomami użyteczności



Funkcje użyteczności

- ▶ Kiedy nie możemy utworzyć funkcji użyteczności?
- ▶ Np. kiedy preferencja nie posiada własności przechodniości
- ▶ Jeżeli:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \quad \mathbf{y} \succ \mathbf{z} \quad \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$$

- ▶ Czy potrafimy stworzyć funkcję użyteczności?

$$U(\mathbf{x}) = ???$$

$$U(\mathbf{y}) = ???$$

$$U(\mathbf{z}) = ???$$



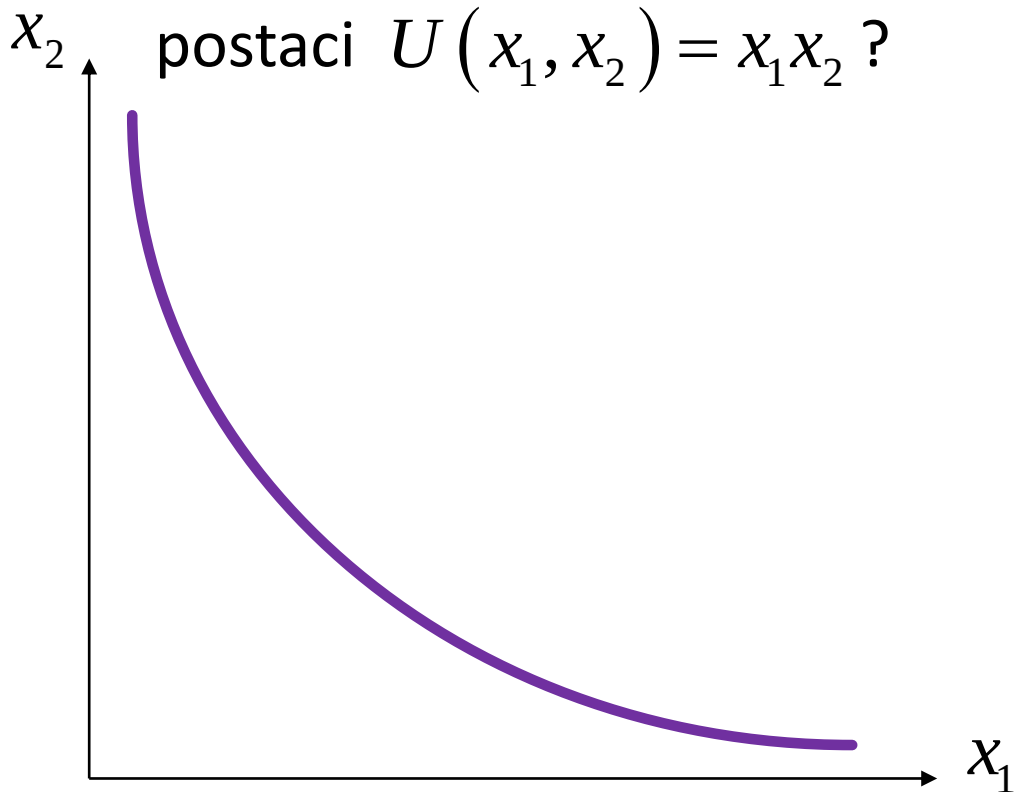
Funkcja użyteczności

- ▶ Funkcja użyteczności porządkuje różne koszyki nadając im różne wartości użyteczności
- ▶ Każda relacja preferencji może mieć wiele funkcji użyteczności, które będą ją reprezentować
- ▶ Każda ściśle rosnąca transformacja funkcji użyteczności jest nową funkcją użyteczności, która reprezentuje te same preferencje
 - ▶ Np. załóżmy, że $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ reprezentuje preferencje
 - ▶ Wtedy $U(4, 1) = 4$, $U(2, 3) = 6$, $U(2, 2) = 4$
 - ▶ Ściśle rosnąca transformacja funkcji użyteczności to np.
$$U'(x_1, x_2) = \left(U(x_1, x_2)\right)^2 + 10 = \left(x_1 x_2\right)^2 + 10$$
 - ▶ Czy nowa funkcja zachowuje preferencje?



Funkcje użyteczności – przykłady

- ▶ Krzywa obojętności – zawiera wszystkie koszyki, które dają tę samą użyteczność
- ▶ Jak wyglądają krzywe obojętności funkcji użyteczności o postaci $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$?



$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$
$$x_2 = \frac{\bar{U}}{x_1}$$

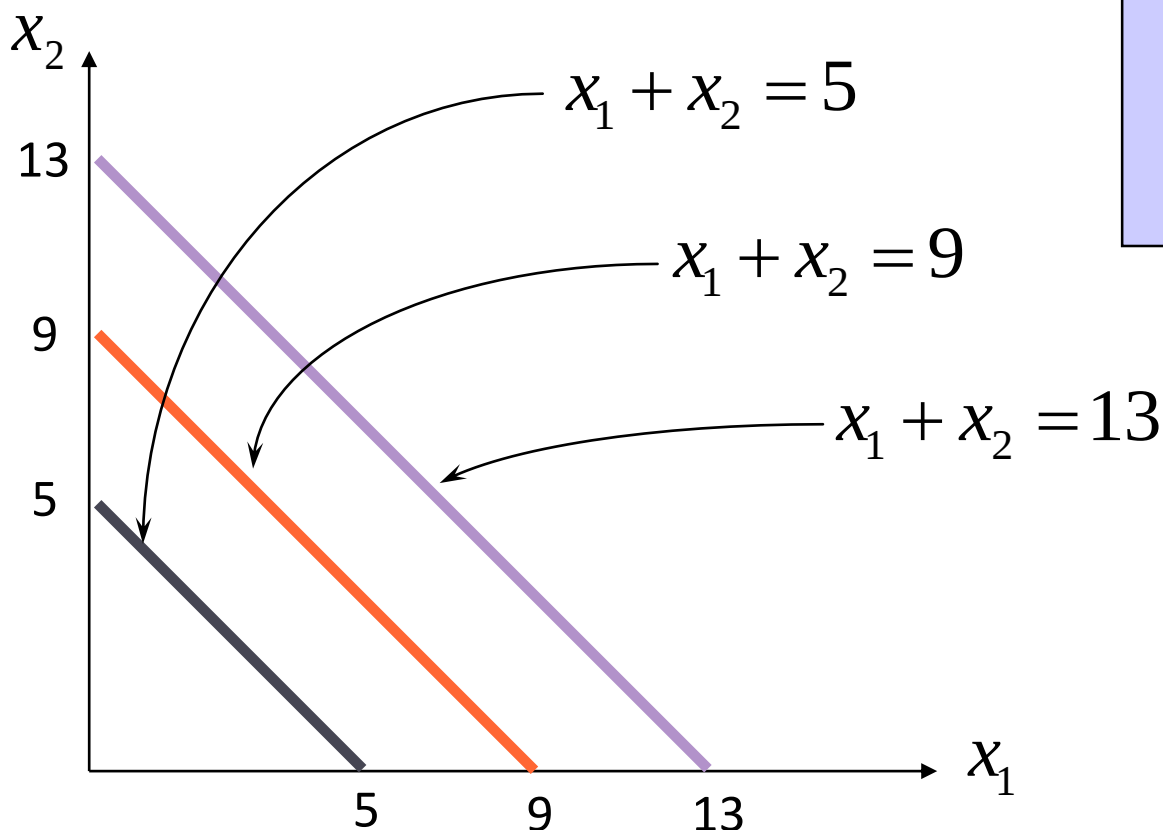
Funkcja użyteczności - znaczenie

- ▶ Określenie funkcji użyteczności pozwala na:
 - ▶ Estymację preferencji konsumentów.
 - ▶ Analizę dokonywanych przez nich wyborów
 - ▶ Ocenę i porównanie wielu hipotetycznych sytuacji konsumenta.
 - ▶ Optymalizację wyborów konsumentów (określenie sposobu podejmowania decyzji – **dokonywania wyborów**).



Funkcje użyteczności – przykłady

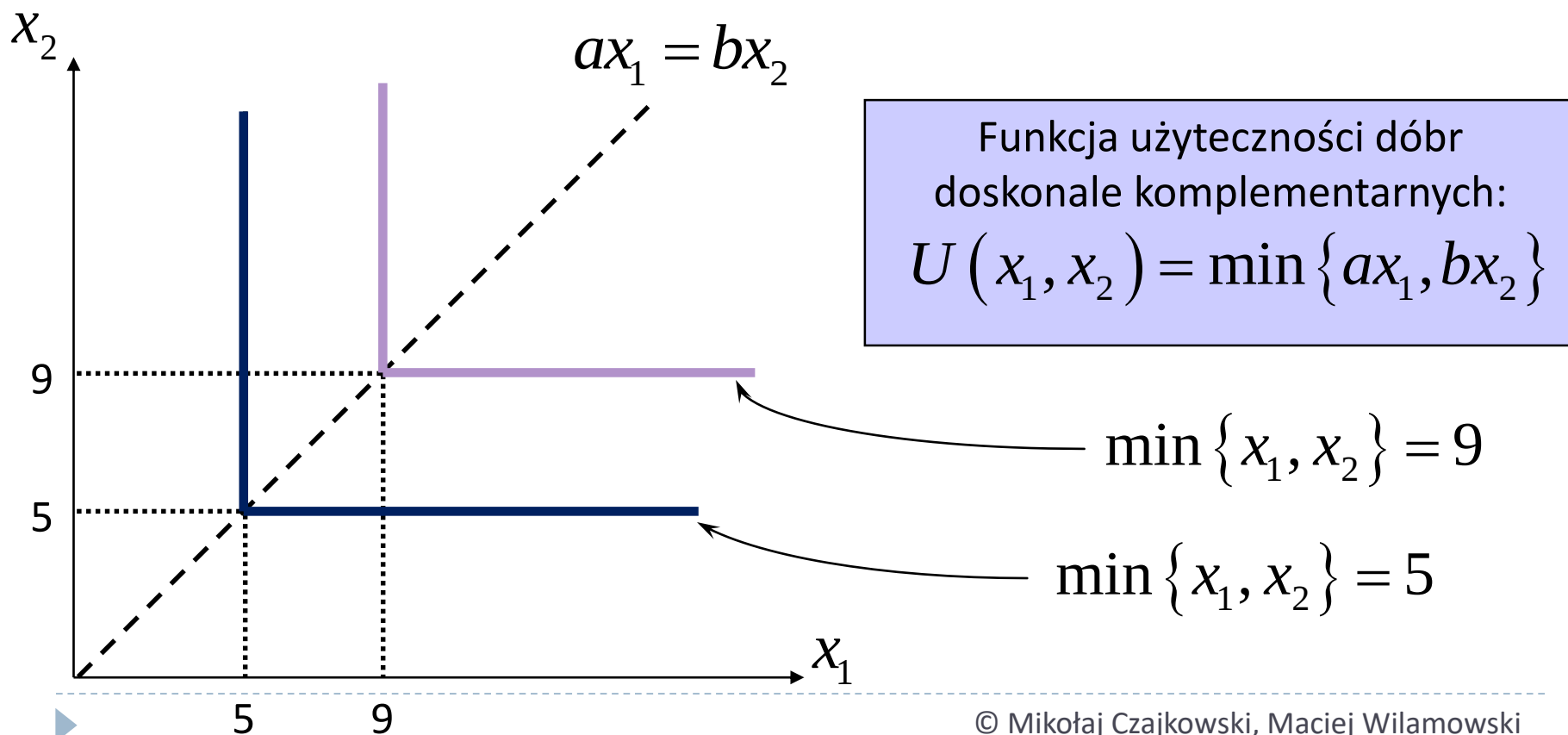
- ▶ Jak wyglądają krzywe obojętności funkcji użyteczności o postaci $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$?



Funkcja użyteczności dóbr doskonale substytucyjnych:
 $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

Funkcje użyteczności – przykłady

- ▶ Jak wyglądają krzywe obojętności funkcji użyteczności o postaci $U(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$?



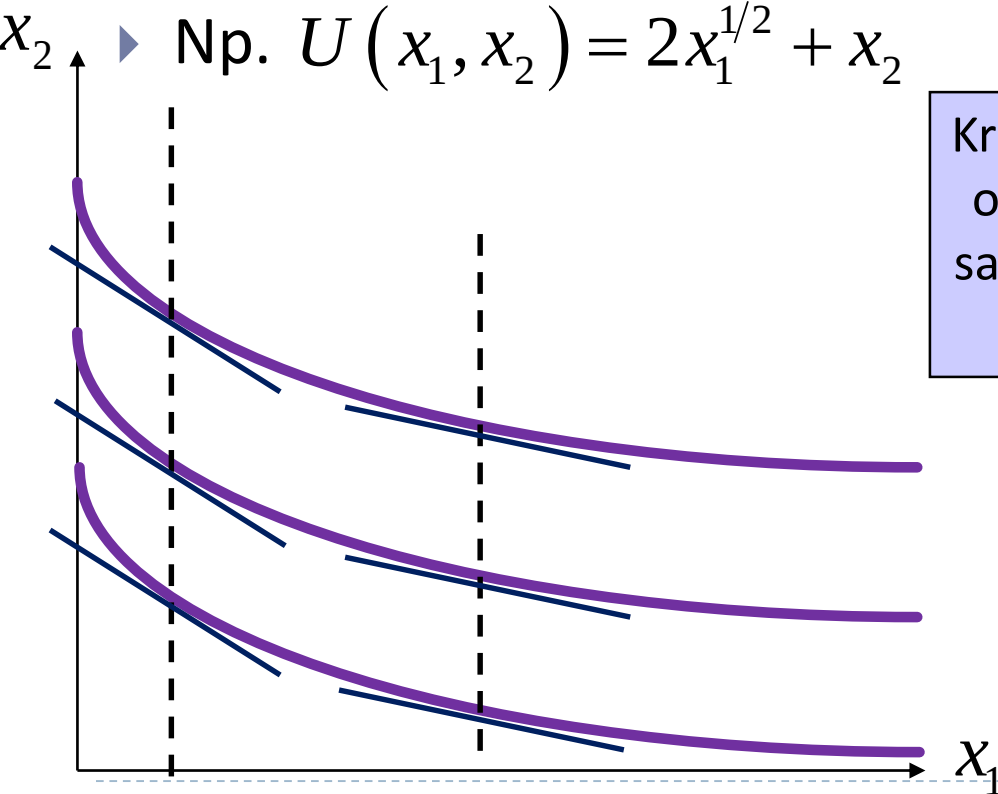
Funkcje użyteczności – przykłady

- ▶ Quasi-liniowa funkcja użyteczności ma postać:

$$U(x_1, x_2) = f(x_1) + x_2$$

- ▶ Liniowa tylko względem x_2 – quasi-liniowa

▶ Np. $U(x_1, x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$



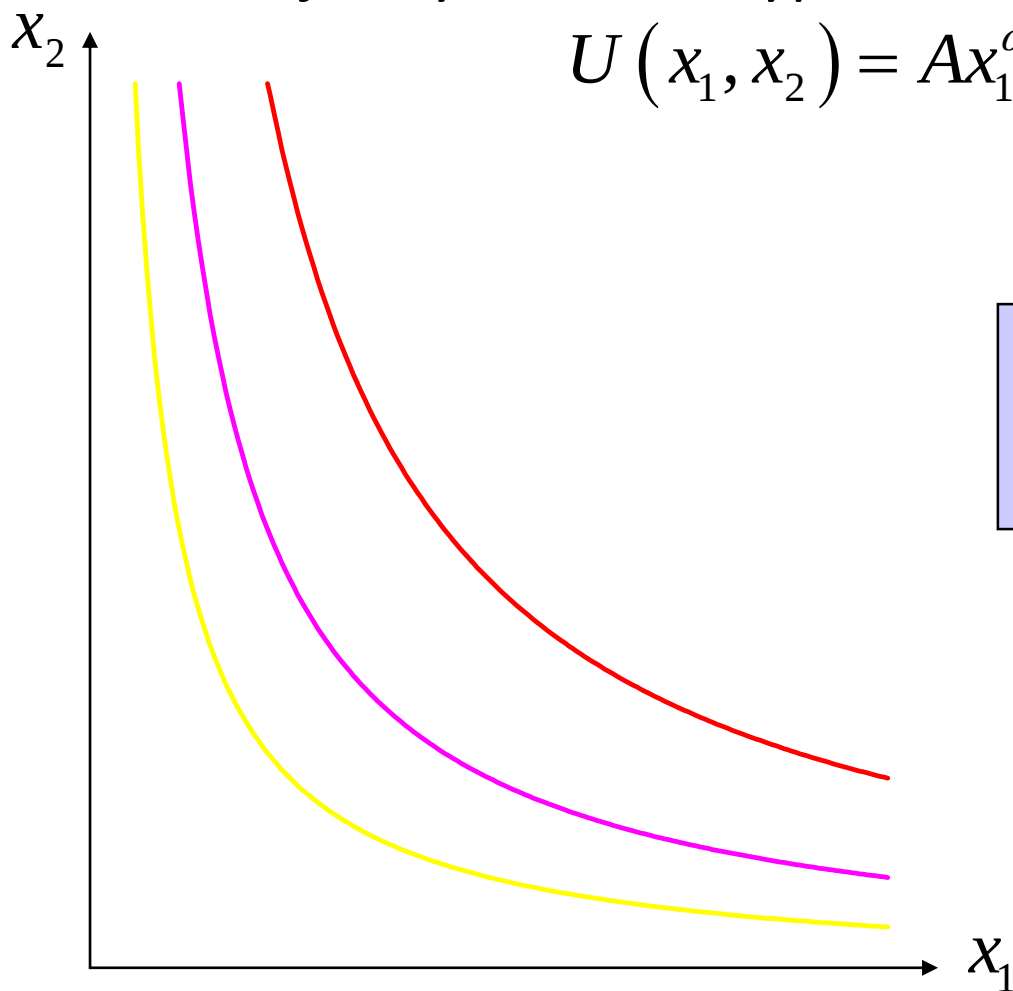
Krzywe obojętności quasi-liniowej funkcji obojętności są liniowym przesunięciem samych siebie wzdłuż osi reprezentującej ‘quasi-liniowe’ dobro

Dla danej ilości ‘niequasi-liniowego’ dobra nachylenie wszystkich izokwant jednakowe

Funkcje użyteczności

► Funkcja użyteczności typu Cobba-Douglasa

$$U(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$$



Wszystkie krzywe obojętności
hiperbolami – osie asymptotami
każdej z nich

Użyteczność krańcowa

- ▶ W ekonomii ‘krańcowa’ (ang. *marginal*) oznacza wynikająca ze zmiany zmiennej o jednostkę, gdzie ‘jednostka’ jest nieskończenie mała
 - ▶ Np. jak zmienia się użyteczność na skutek (krańcowej) zmiany ilości jednego z dóbr w koszyku?

- ▶ Użyteczność krańcowa

$$MU_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta U(\square)}{\Delta x_i} = \frac{dU(\square)}{dx_i} = \frac{\partial U(\square)}{\partial x_i}$$

- ▶ Więc – jeśli funkcja różniczkowalna – krańcowa użyteczność dobra to pochodna funkcji użyteczności po tym dobrze
- ▶ Pamiętając o tym, że użyteczność jest porządkowa to użyteczność krańcowa mów nam (parafrazując):
 - ▶ „O ile poziomów (szczebli) krzywych obojętności wskoczę do góry przy wzroście zasobu dobra”?



Użyteczność krańcowa

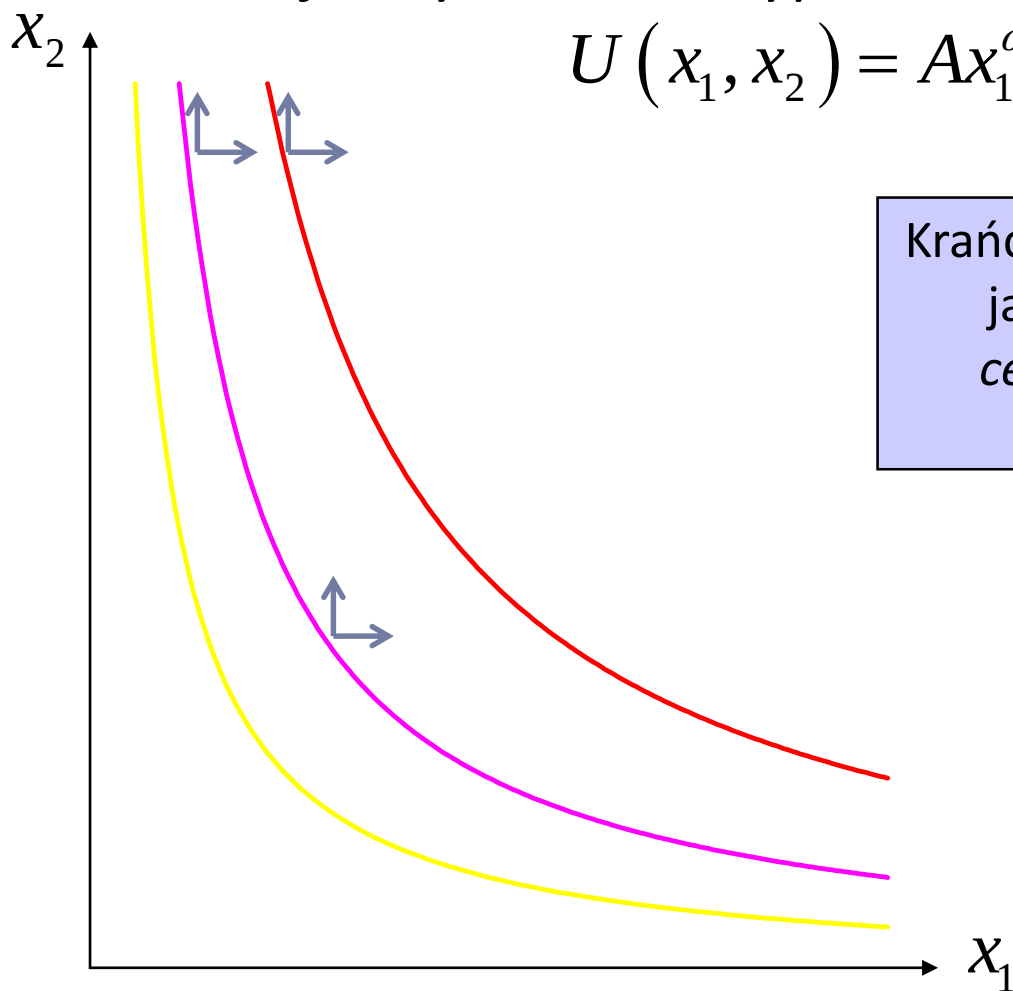
- ▶ Na przykład dla funkcji: $U(x_1, x_2) = Ax_1x_2$
- ▶ Krańcowa użyteczność danego dobra dla tej funkcji użyteczności **zależy od tego jaki jest aktualnie poziom drugiego dobra w koszyku**



Użyteczność krańcowa

► Funkcja użyteczności typu Cobba-Douglasa

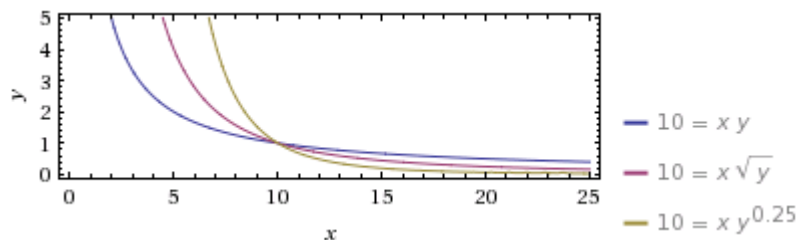
$$U(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$$



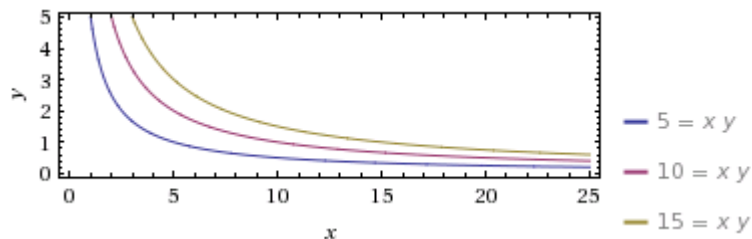
Krańcowa użyteczność mówi nam o tym jak zmieni się użyteczność jeżeli, *ceteris paribus* zwiększymy zasób jednego dobra

Użyteczność krańcowa

- ▶ Przydatne narzędzie: www.wolframalpha.com
- ▶ Prosta składnia:
 - ▶ plot $10=x*y$, $10=x*y^{0.5}$, $10=x*y^{0.25}$ for x from 0 to 25 and y from 0 to 5

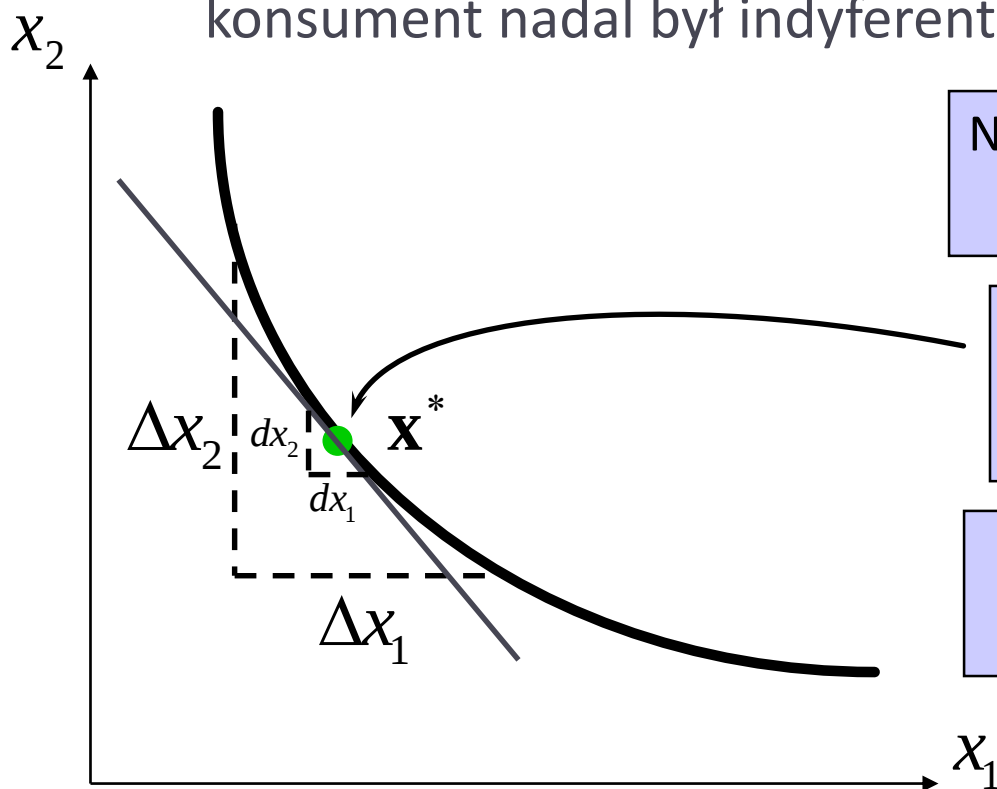


- ▶ plot $5=x*y$, $10=x*y$, $15=x*y$ for x from 0 to 25 and y from 0 to 5



Nachylenie krzywych obojętności

- ▶ Nachylenie krzywej obojętności w punkcie to *krańcowa stopa substytucji* (*marginal rate of substitution, MRS*)
 - ▶ W jakiej proporcji można zastępować 2 dobra w koszykach, aby konsument nadal był indyferentny pomiędzy koszykami



Nachylenie krzywej obojętności
w $\mathbf{x}^*$ jest równe *MRS*

$$MRS = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{dx_2}{dx_1}$$

MRS – nachylenie stycznej do
krzywej obojętności w punkcie

Krańcowa stopa substytucji

- ▶ Powiedzieliśmy, że krańcowa stopa substytucji określa jak można wymieniać dobra w koszyku, pozostając na k.o.
- ▶ Krzywa obojętności dla użyteczności k dana jest przez:

$$U(x_1, x_2) = k$$

- ▶ Całkowita zmiana użyteczności – pochodna funkcji po każdej ze zmiennych razy krańcowo mała zmiana tej zmiennej

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

- ▶ ... równa zero, ponieważ chcemy zostać na krzywej obojętności
- ▶ Przekształcając:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = - \frac{\partial U}{\partial x_2} / \frac{\partial U}{\partial x_1} = - \frac{MU_{x_2}}{MU_{x_1}}$$



Krańcowa stopa substytucji

- ▶ Pozostając na danej krzywej obojętności krańcowo małe ilości dóbr dx_1/dx_2 można wymieniać w proporcji określonej przez MRS :

$$MRS_{x_2x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \bigg/ \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{MU_{x_2}}{MU_{x_1}}$$

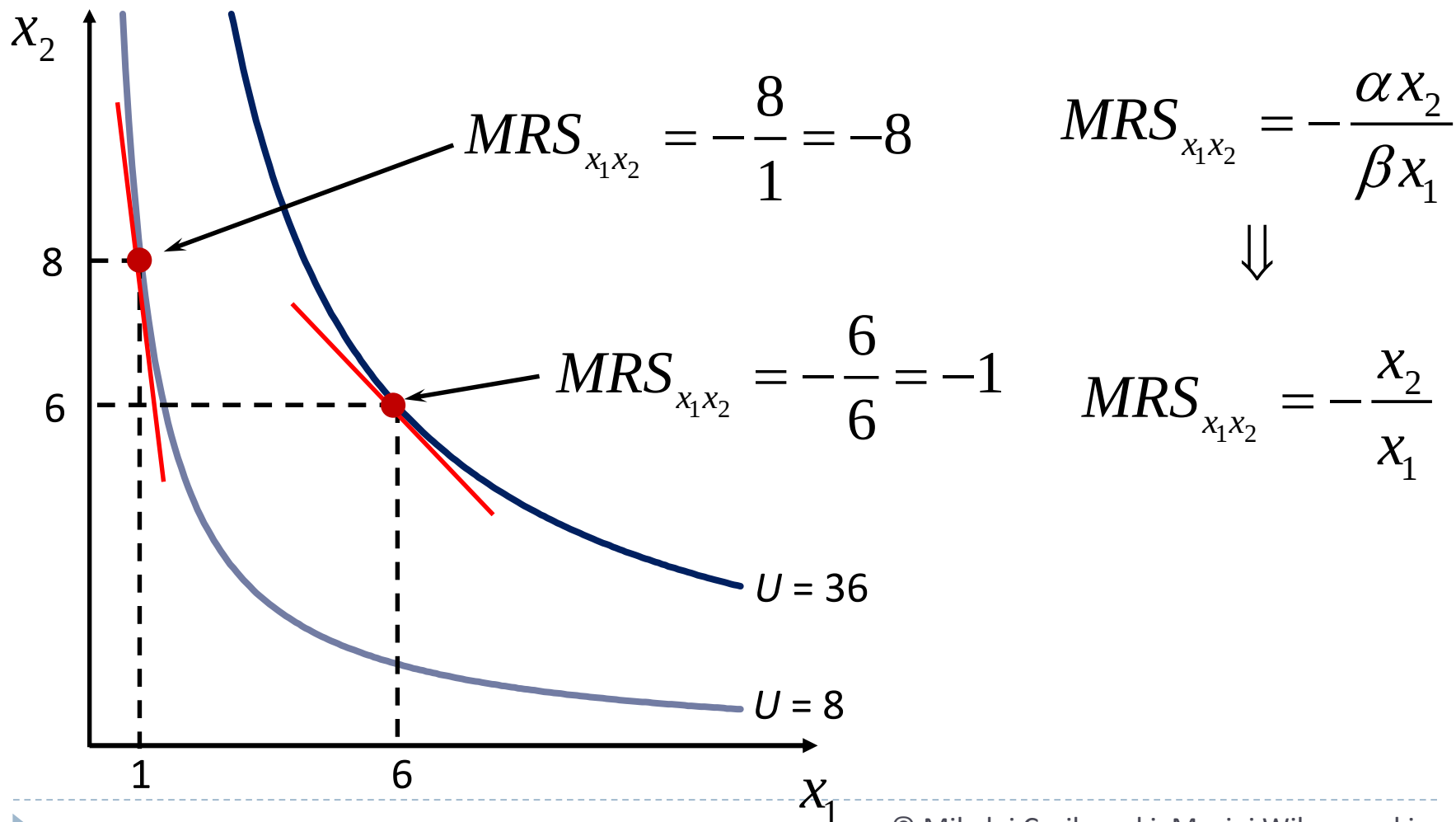
- ▶ MRS określa nachylenie krzywej obojętności w danym jej punkcie
- ▶ Na przykład dla funkcji użyteczności typu Cobba-Douglasa o postaci $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ MRS wynosi:

$$MRS_{x_1x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \bigg/ \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta}{\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}} = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$



Krańcowa stopa substytucji

- Dla funkcji użyteczności $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$:



Krańcowa stopa substytucji

- ▶ Dla quasi-liniowej funkcji użyteczności $U(x_1, x_2) = f(x_1) + x_2$

$$MU_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = f'(x_1)$$

$$MU_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 1$$

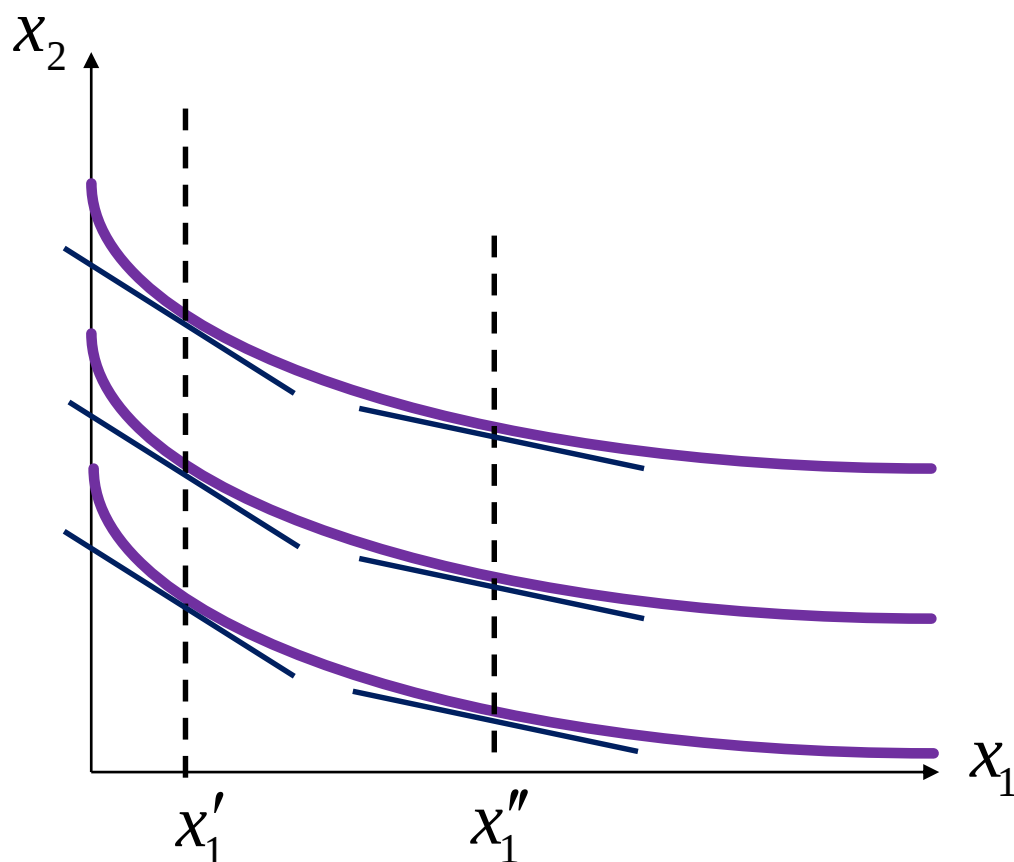
$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{f'(x_1)}{1}$$

- ▶ Krańcowa stopa substytucji nie zależy od x_2 więc nachylenie krzywych obojętności dla tego samego x_1 będzie równe



Krańcowa stopa substytucji

- ▶ Dla quasi-liniowej funkcji użyteczności $U(x_1, x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$



$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{f'(x_1)}{1}$$

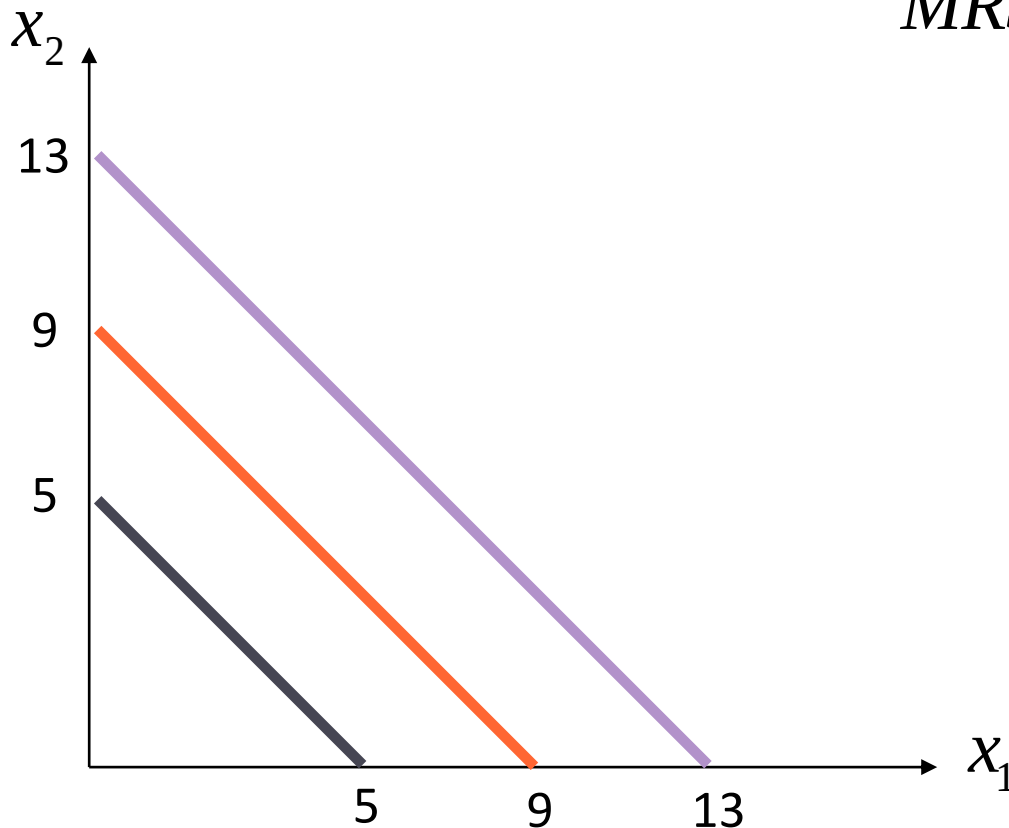
$$MRS_{x_1 x_2} = -x_1^{-1/2}$$

MRS niezależna od x_2

Krańcowa stopa substytucji

- ▶ Dla doskonałych substytutów: $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} / \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{a}{b}$$

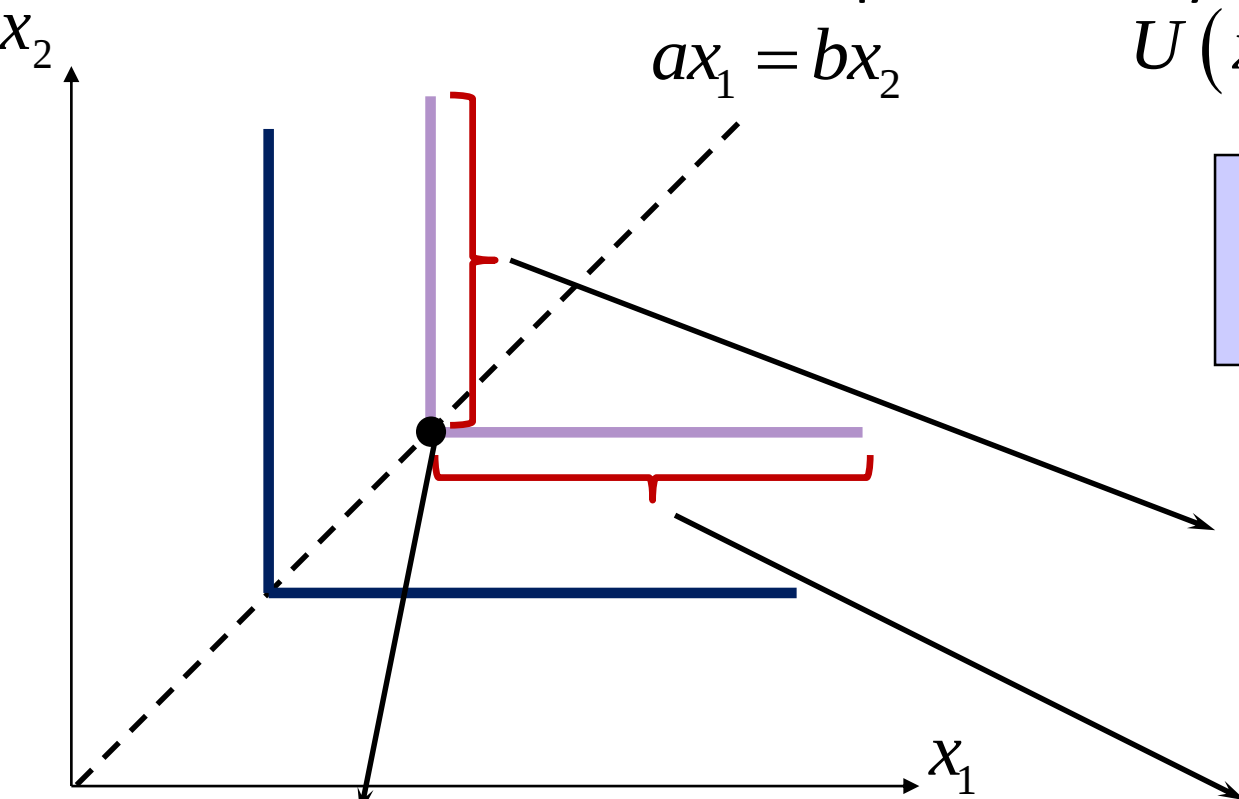


MRS stałe w każdym punkcie
– określa nachylenie
krzywych obojętności
(które są prostymi)

Krańcowa stopa substytucji

- ▶ Dla dóbr doskonale komplementarnych:

$$U(x_1, x_2) = \min \{ax_1, bx_2\}$$



MRS nieokreślone
(funkcja użyteczności
nieróżniczkowalna)

$MRS_{x_1 x_2} = ?$
Wiele możliwych 'stycznych'

Krańcowa stopa substytucji

- ▶ Powiedzieliśmy, że każda ściśle rosnąca transformacja funkcji użyteczności zachowuje te same preferencje
 - ▶ Co więcej – nie zmienia *MRS*

$$U(x_1, x_2)$$

$$V = f(U(x_1, x_2))$$

$$MRS_{x_1 x_2} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} \quad MRS_{x_1 x_2} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial x_2}} = - \frac{f'(U) \frac{\partial U}{\partial x_1}}{f'(U) \frac{\partial U}{\partial x_2}} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

- ▶ *MRS* jest niezależne od monotonicznych transformacji funkcji



MRS a krańcowa użyteczność

Dla utrwalenia

- ▶ **Krańcowa użyteczność** mówi nam jak **zmieni się** użyteczność (przeskoczmy na inną krzywą obojętności)
- ▶ **Krańcowa stopa substytucji** mówi nam o tym w jakiej proporcji muszę zamieniać dobra aby **nie zmienić** użyteczności (pozostać na tej samej krzywej obojętności)

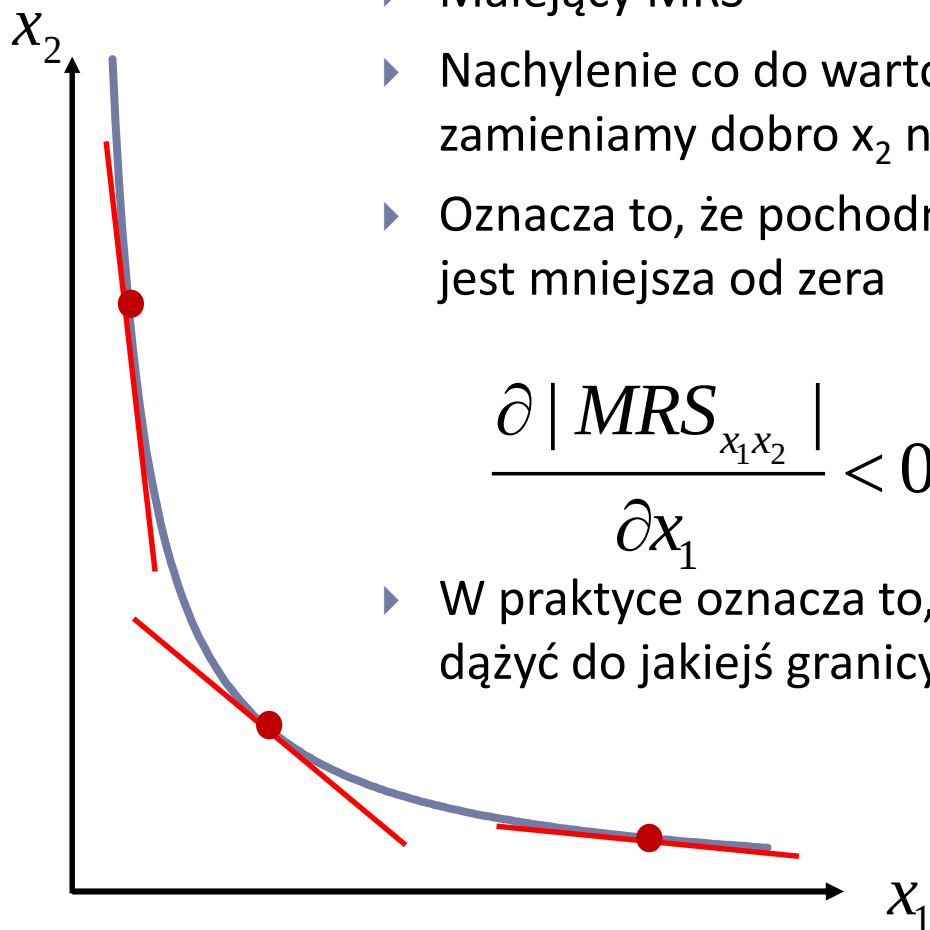


Malejąca krańcowa stopa substytucji

- ▶ Dla funkcji użyteczności: $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$
- ▶ Malejący MRS
- ▶ Nachylenie co do wartości bezwzględnej maleje (gdy zamieniamy dobro x_2 na x_1)
- ▶ Oznacza to, że pochodna z wartości bezwzględnej MRS jest mniejsza od zera

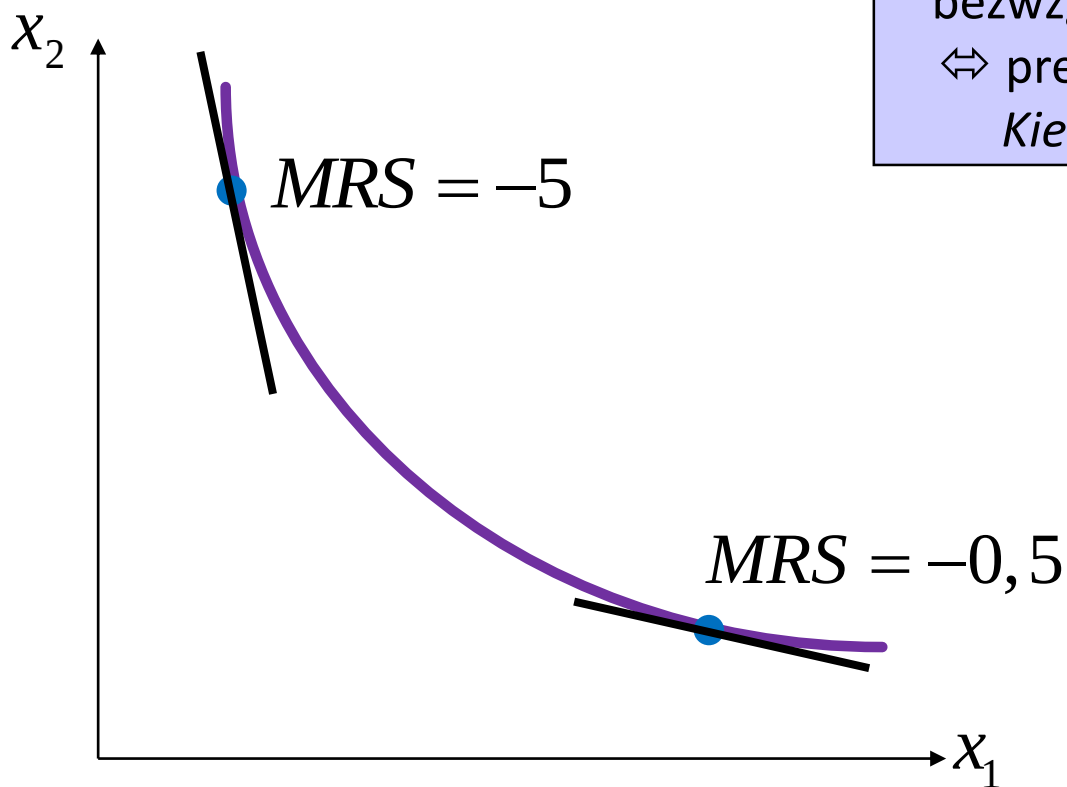
$$\frac{\partial |MRS_{x_1 x_2}|}{\partial x_1} < 0$$

- ▶ W praktyce oznacza to, że wartość bezwzględna MRS musi dążyć do jakiejś granicy (zazwyczaj zera)



Nachylenie krzywych obojętności

- ▶ Prawo ‘malejącej’ krańcowej stopy substytucji



*MRS maleje (co do wartości bezwzględnej) ze wzrostem x_1
 $\Leftrightarrow$ preferencje ściśle wypukłe
Kiedy obydwa dobra (+)*

Praca samodzielna

- ▶ Literatura
 - ▶ Varian: Wybór

