

Mikroekonomia A.13

Maciej Wilamowski

Niepewność, a ryzyko

- ▶ Czym różni się ryzyko od niepewności?
- ▶ Niepewność:
 - ▶ Nie wiemy co wydarzy się w przyszłości.
Nie wiemy również jakie jest prawdopodobieństwo możliwych zdarzeń – **nie znamy rozkładu zmiennej losowej**
 - ▶ **Przykład:** ??? – koszty leczenia w przyszłym roku, inwestycje giełdowe
- ▶ Ryzyko
 - ▶ Nie wiemy co wydarzy się w przyszłości.
Wiemy jakie jest prawdopodobieństwo możliwych zdarzeń – **znamy rozkład zmiennej losowej**
 - ▶ **Przykład:** Los na loterii, inwestycje giełdowe



Loteria

- ▶ Nazwijmy loterią zdarzenie losowe, które może dać różne rezultaty, np. gra w orła i reszkę, gra w lotto etc.
- ▶ W przypadku loterii znamy wielkość wypłat oraz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia:
 - ▶ $L = \{(2; 0,5), (-2; 0,5)\}$
 - ▶ $L = (1, 0.2; 2, 0.2; 3, 0.2; 0, 0.4)$
 - ▶ $L = \{(1; 0,2), (2; 0,2), (3; 0,2), (0; 0,4)\}$
- ▶ Loteria – wiemy co się może wydarzyć oraz z jakim prawdopodobieństwem – ryzyko!



Wartość oczekiwana

- ▶ Zmienna losowa przyjmuje wartości $w_1, w_2, \dots, w_S$ z prawdopodobieństwem $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_S$
- ▶ Rozkład zmiennej
- ▶ Wartość oczekiwana zmiennej (rozkładu) to średnia z wartości ważonych prawdopodobieństwami

$$E(w) = \mu_w = \sum_{s=1}^S w_s \pi_s$$

Wartość oczekiwana – przykłady

- ▶ Gra w Orła i Reszkę – $L = \{(2; 0,5), (-2; 0,5)\}$
 - ▶ $EX = 2 * 0,5 + (-2) * 0,5 = 0$
- ▶ Loteria – $L = \{(1; 0,2), (2; 0,2), (3; 0,2), (0; 0,4)\}$
 - ▶ $EX = 1*0,2+2*0,2+3*0,2+0*0,4 = 1,2$



Wariancja i odchylenie standardowe

- ▶ Wariancja zmiennej losowej mierzy jak bardzo wartości zmiennej różnią się od wartości oczekiwanej (średnio)
 - ▶ Średnia (ważona prawdopodobieństwami) kwadratów różnicy każdej obserwacji i wartości oczekiwanej

$$\text{var}(w) = \sigma_w^2 = \sum_{s=1}^S (w_s - \mu_w)^2 \pi_s$$

- ▶ Odchylenie standardowe to pierwiastek z wariancji

$$\text{s.d.}(w) = \sigma_w = \sqrt{\sum_{s=1}^S (w_s - \mu_w)^2 \pi_s}$$



Wariancja i odchylenie standardowe

- ▶ Gra w Orła i Reszkę – $L = \{(2; 0,5), (-2; 0,5)\}$
 - ▶ $EX = 2 * 0,5 + (-2) * 0,5 = 0$
 - ▶ $Var = (2-0)^2 * 0,5 + (-2-0)^2 * 0,5 = 4$
- ▶ Loteria – $L = \{(1; 0,2), (2; 0,2), (3; 0,2), (0; 0,4)\}$
 - ▶ $EX = 1*0,2+2*0,2+3*0,2+0*0,4 = 1,2$
 - ▶ $EX = (1-1,2)^2*0,2+(2-1,2)^2*0,2+(3-1,2)^2*0,2+(0-1,2)^2*0,4 = 1,36$



Ryzyko i niepewność

▶ Niepewność

- ▶ Obecne / przyszłe ceny, dochody, zdarzenia itp.

▶ Rozwiązania:

- ▶ Konsumpcja uzależniona od przyszłych stanów (warunkowa)
 - ▶ Np. wakacje, tylko jeśli nie było wypadku
- ▶ Ubezpieczenie samochodu
 - ▶ Wypadek z prawdopodobieństwem π_A
 - ▶ Brak wypadku z prawdopodobieństwem $\pi_{NA} = 1 - \pi_A$
 - ▶ Wypadek powoduje szkodę w wysokości L
 - ▶ Ubezpieczenie – kontrakt, który działa tylko w określonym przypadku w przyszłości (warunkowy)



Preferencje w przypadku niepewności

- ▶ *Funkcja użyteczności oczekiwanej* – wartość oczekiwana użyteczności w różnych stanach końcowych (*funkcja użyteczności von Neumanna-Morgensterna*)

$$EU(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n \pi_i U(c_i)$$

- ▶ Np. weźmy loterię, w której z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ można wygrać 90 i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ można wygrać 0
- ▶ Konsument ma jakiś dodatkowy dochód, tak że:

$$U(90) = 12, \quad U(0) = 2$$

- ▶ Wtedy:

$$EU = 0,5 \cdot U(90) + 0,5 \cdot U(0) = 0,5 \cdot 12 + 0,5 \cdot 2 = 7$$



Skłonność do ryzyka

- ▶ Wartość oczekiwana wygranej na loterii to:

$$EX = 0,5 \cdot 90 + 0,5 \cdot 0 = 45$$

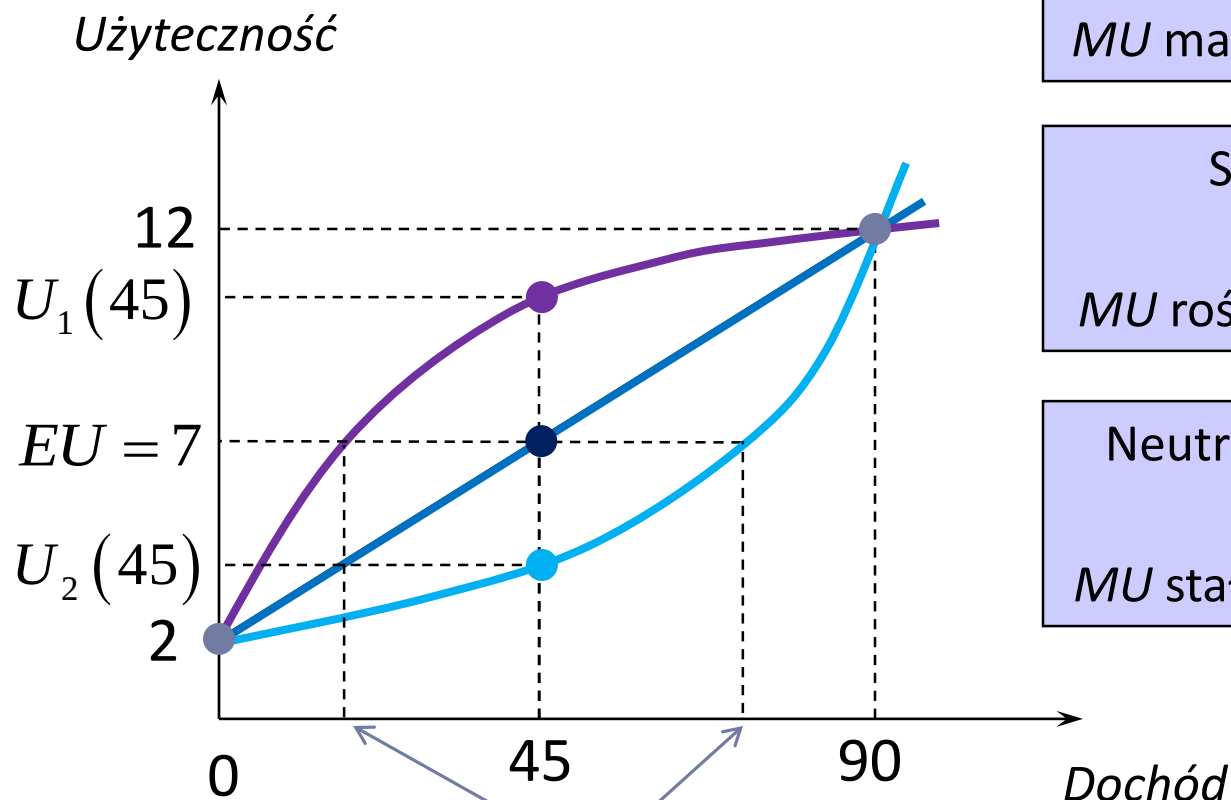
- ▶ Wtedy

- ▶ $EU < U(EX) \Leftrightarrow 7 < U(45)$
 - konsument ma *awersję do ryzyka* (woli na pewno niż losowo)
- ▶ $EU > U(EX) \Leftrightarrow 7 > U(45)$
 - konsument ma *skłonność do ryzyka*
- ▶ $EU = U(EX) \Leftrightarrow 7 = U(45)$
 - konsument jest *neutralny względem ryzyka*

- ▶ Konsumenta interesuje „średnia” użyteczność, a nie średnia wypłata.



Skłonność do ryzyka



Awersja do ryzyka:

$$U_1(45) > EU$$

MU maleje ze wzrostem dochodu

Skłonność do ryzyka:

$$U_2(45) < EU$$

MU rośnie ze wzrostem dochodu

Neutralność względem ryzyka:

$$U_3(45) = EU$$

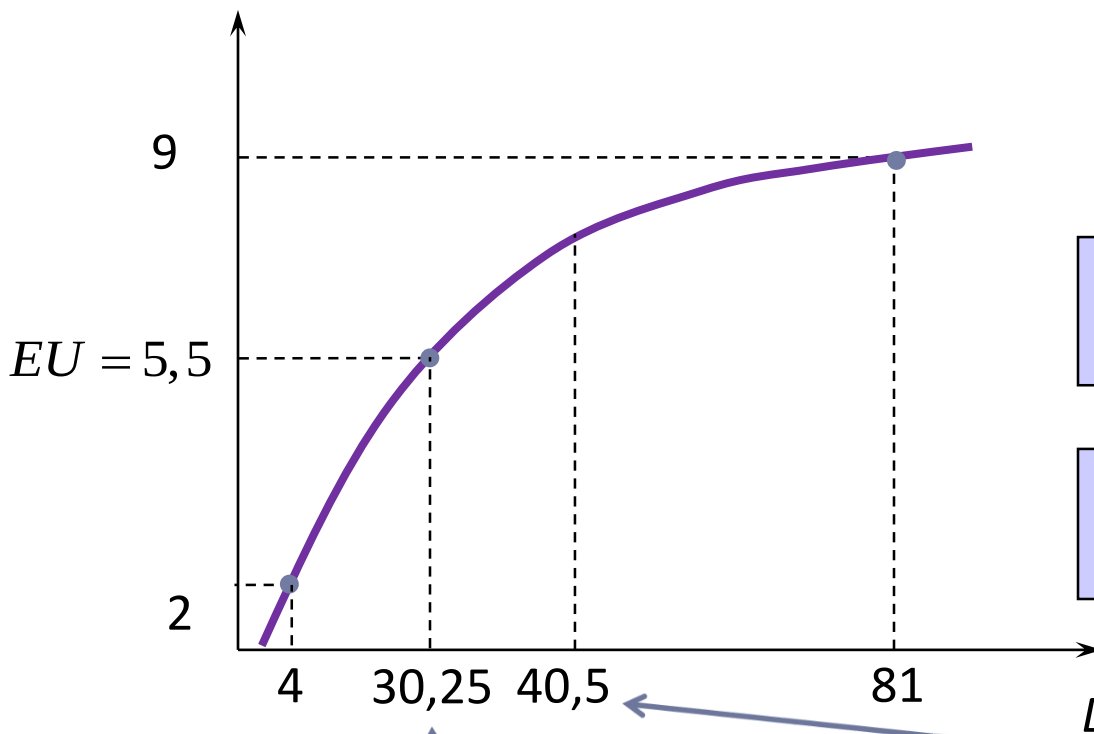
MU stałe przy zmianach dochodu

Ekwiwalent pewności

Premia za ryzyko

- Premia za ryzyko – o ile musimy zwiększyć wypłatę w wartości oczekiwanej aby zrekompensować ryzyko.

Użyteczność



$$U_1(I) = \sqrt{I}$$

Ekwiwalent pewności:
30,25

Premia za ryzyko:
12,25

Ekwiwalent pewności

$$EX = 0,5 \cdot 81 + 0,5 \cdot 4 = 42,5$$

Ekwiwalent pewności

- ▶ Interesuje nas wartość oczekiwana użyteczności:

$$EU(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n \pi_i U(c_i)$$

- ▶ To przy funkcji użyteczności: $U_1(I) = \sqrt{I}$

- ▶ Loterii: $L = \{(4; 0,5), (81; 0,5)\}$

- ▶ Wartość oczekiwana użyteczności wyniesie:

$$EU = 0,5 \cdot U(81) + 0,5 \cdot U(4) = 0,5 \cdot 9 + 0,5 \cdot 2 = 5,5$$

- ▶ Jakie **pewne** zdarzenie pozwoli konsumentowi uzyskać użyteczność równą 5,5?

$$4,5 = \sqrt{I} \Rightarrow I = 30,25 \quad EX = 0,5 \cdot 81 + 0,5 \cdot 4 = 42,5$$

- ▶ Ekwiwalent pewności wynosi 30,25, a premia za ryzyko 12,25



Funkcja użyteczności, a wartość oczekiwana

- ▶ Gdy obliczamy wartość oczekiwaną użyteczności

$$EU(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n \pi_i U(c_i)$$

- ▶ Dla funkcji:

$$U_1(I) = \sqrt{I}$$

$$U_2(I) = \ln(I)$$

- ▶ Przy loterii: $L = \{(c_1, \pi_1); (c_2, \pi_2)\}$

- ▶ To:

$$EU_1(I) = \pi_1 \sqrt{c_1} + \pi_2 \sqrt{c_2} \quad EU_2(I) = \pi_1 \ln(c_1) + \pi_2 \ln(c_2)$$

- ▶ Możemy sparafrazować jako:

???

$$U_x(c_1, c_2) = c_1^{\pi_1} c_2^{\pi_2}$$



Warunkowe ograniczenie budżetowe

- ▶ Ubezpieczenie kosztuje γ od każdej złotówki wartości
- ▶ Konsument ma dochód m
- ▶ c_{NA} – konsumpcja gdy zdarzenie nie zachodzi
- ▶ c_A – konsumpcja gdy zdarzenie zachodzi
- ▶ L – strata w przypadku zajścia zdarzenia
- ▶ Bez ubezpieczenia:
 - ▶ $c_A = m - L$
 - ▶ $c_{NA} = m$
- ▶ Z ubezpieczeniem na wartość K
 - ▶ $c_{NA} = m - \gamma K$
 - ▶ $c_A = m - \gamma K - L + K = m - L + (1 - \gamma)K$

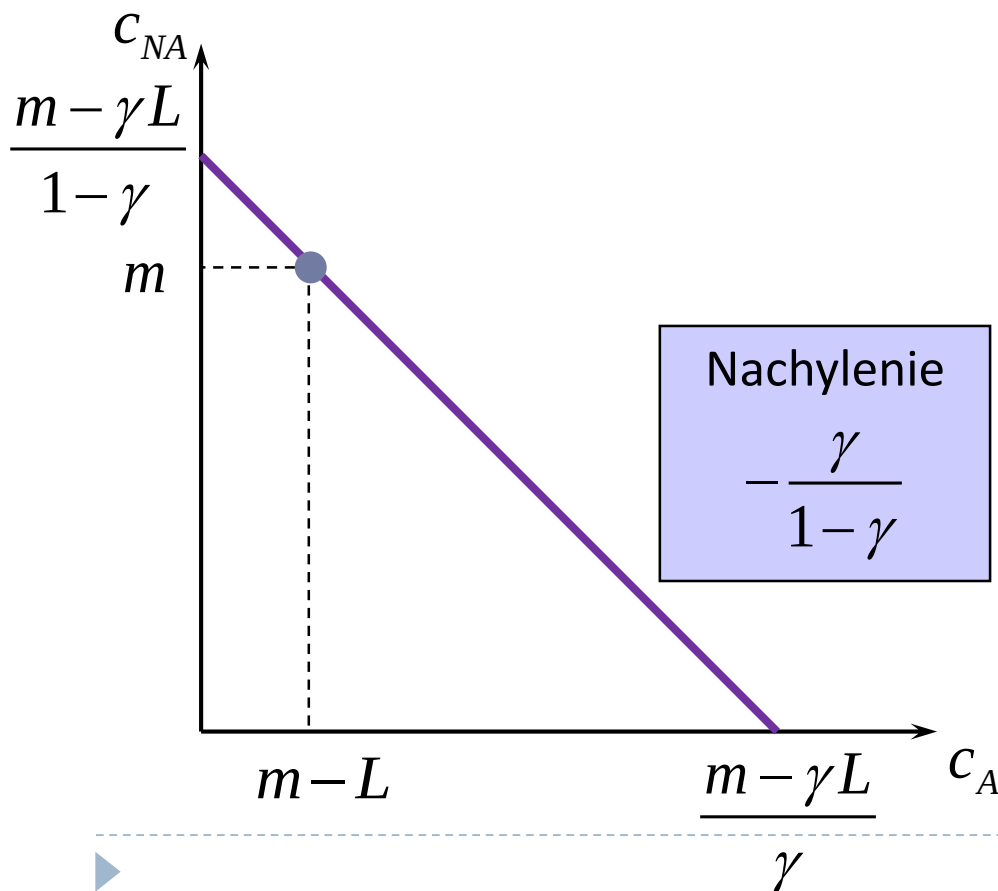
Warunkowe ograniczenie budżetowe

$$c_{NA} = m - \gamma K$$

$$c_A = m - L + (1 - \gamma) K \Rightarrow K = \frac{c_A - m + L}{1 - \gamma}$$

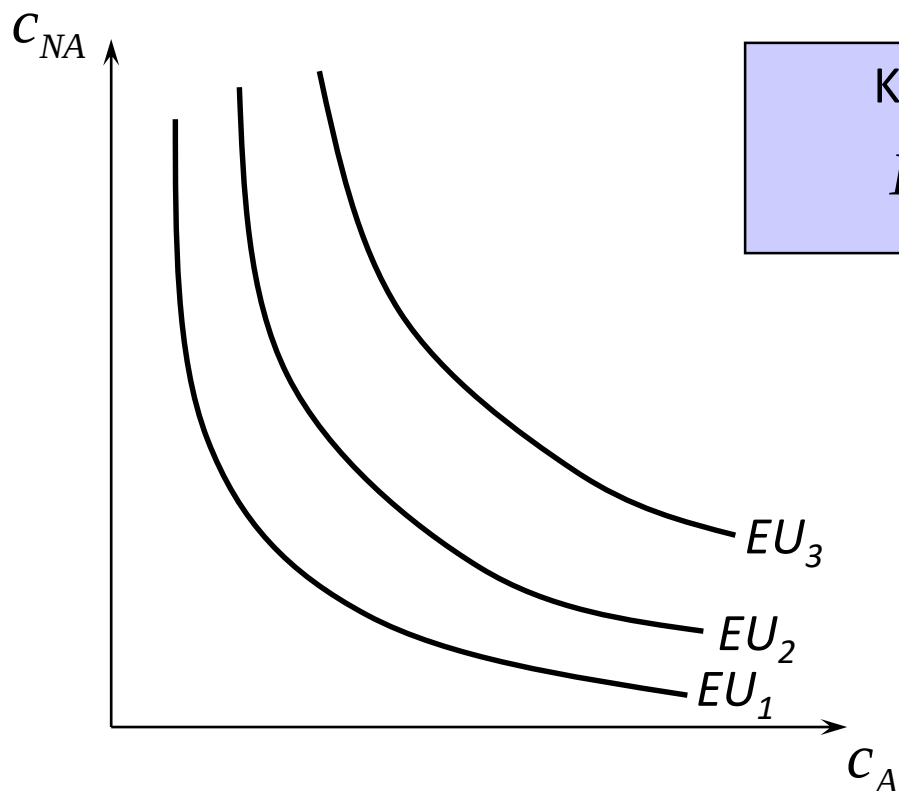
$$c_{NA} = m - \gamma \frac{c_A - m + L}{1 - \gamma}$$

$$c_{NA} = \frac{m - \gamma L}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{1 - \gamma} c_A$$



Który punkt na krzywej ograniczenia budżetowego jest optymalny?

Preferencje w przypadku niepewności



Krzywe obojętności:

$$EU_1 < EU_2 < EU_3$$



Krańcowa stopa substytucji

- ▶ Wyznaczmy krańcową stopę substytucji:

- ▶ $EU = \pi_1 U(c_1) + \pi_2 U(c_2)$

- ▶ Na krzywej obojętności – użyteczność stała $dEU = 0$

$$dEU = \pi_1 MU(c_1)dc_1 + \pi_2 MU(c_2)dc_2 = 0$$

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\pi_1 MU(c_1)}{\pi_2 MU(c_2)}$$

- ▶ U nas:

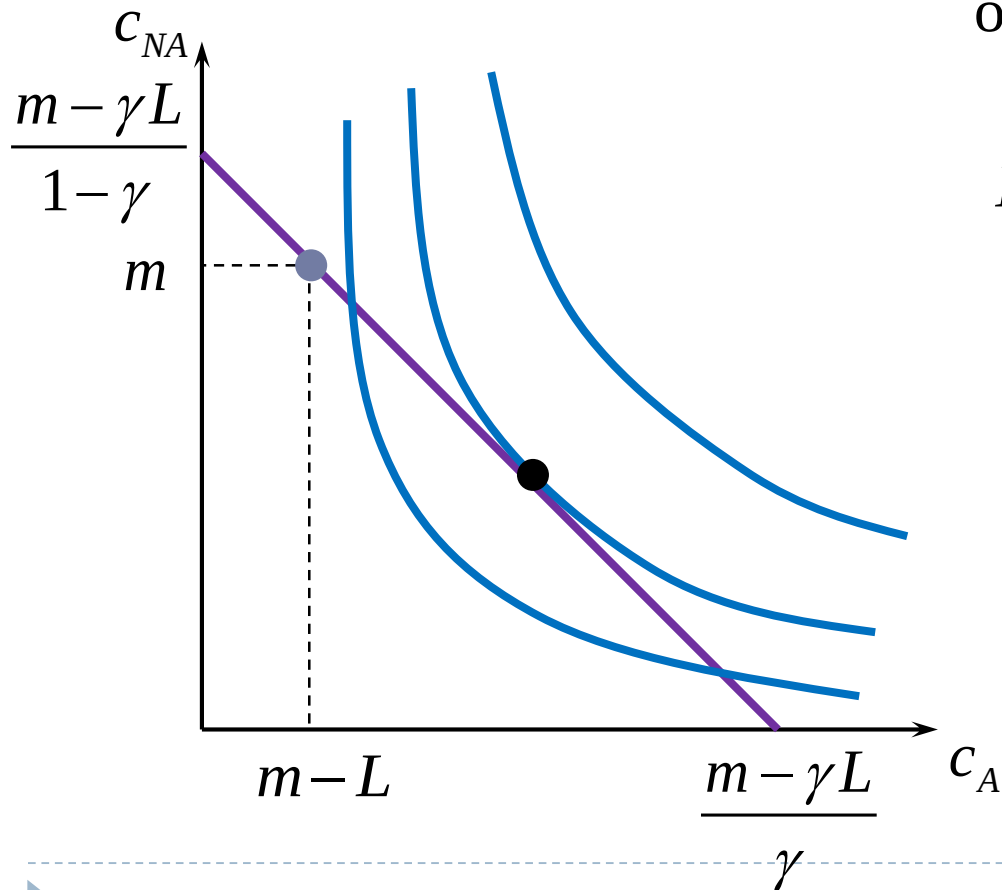
$$MRS_{c_A c_{NA}} = -\frac{\pi_A MU(c_A)}{\pi_{NA} MU(c_{NA})}$$

- ▶ Dalej analiza jak zwykle (ograniczenie budżetowe + krzywe obojętności)



Optymalny wybór

- Dla rozwiązania wewnętrznego



$$\text{o.b. } c_{NA} = \frac{m - \gamma L}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{1 - \gamma} c_A$$

$$MRS_{c_A c_{NA}} = - \frac{\pi_A MU(c_A)}{\pi_{NA} MU(c_{NA})}$$

$$-\frac{\gamma}{1 - \gamma} = - \frac{\pi_A MU(c_A)}{\pi_{NA} MU(c_{NA})}$$

Optymalny wybór

- ▶ Alternatywnie, optymalny wybór możemy znaleźć „wprost”
- ▶ Pamiętajmy, że wszystkie wyrażenia oprócz wysokości ubezpieczenia K są stałe.
- ▶ Zarówno cena ubezpieczenia jak i pozostałe wyrażenia są znane i stałe (majątek, wielkość straty prawdopodobieństwa).

$$c_{NA} = m - \gamma K$$

$$c_A = m - \gamma K - L + K = m - L + (1 - \gamma) K$$

$$EU = \pi_1 U(c_{NA}) + \pi_2 U(c_A)$$

$$EU = \pi_1 U(m - \gamma K) + \pi_2 U(m - L + (1 - \gamma) K)$$

$$\frac{\partial EU}{\partial K} = 0$$

Gdy nie znamy:
 π_1, π_2
nie możemy optymalizować!
niepewność vs. ryzyko



Uczciwe ubezpieczenie

- ▶ *Uczciwe ubezpieczenie* – ubezpieczyciel nie osiąga zysku

- ▶ Zysk ubezpieczyciela to:

$$\begin{aligned}\gamma K - \pi_A K - (1 - \pi_A) 0 &= (\gamma - \pi_A) K \\ &= 0 \Leftrightarrow \gamma = \pi_A\end{aligned}$$

- ▶ Ubezpieczenie uczciwe gdy koszt ubezpieczenia 1 PLN równy ryzyku zdarzenia (straty)



Uczciwe ubezpieczenie

- ▶ Konsument maksymalizuje użyteczność jeśli jest w punkcie, w którym nachylenie ograniczenia budżetowego jest równe nachyleniu jego krzywych obojętności

- ▶ Dla uczciwego ubezpieczenia:

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{\pi_A}{1-\pi_A} = \frac{\pi_A MU(c_A)}{\pi_{NA} MU(c_{NA})} \Rightarrow MU(c_A) = MU(c_{NA})$$

- ▶ Konsument z awersją do ryzyka ($c_A \Rightarrow MU(c_A) < MU(c_{NA})$) kupi tyle ubezpieczenia, żeby:

$$MU(c_A) = MU(c_{NA}) \Rightarrow c_A = c_{NA}$$

- ▶ Pełne ubezpieczenie



Nieuczciwe ubezpieczenie

- ▶ Jeśli ubezpieczyciel ‘zarabia’ na udzielaniu ubezpieczenia, to jest:

$$\gamma K - \pi_A K - (1 - \pi_A) 0 = (\gamma - \pi_A) K > 0$$
$$\gamma > \pi_A$$

- ▶ Optymalny wybór gdy:

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} = \frac{\pi_A MU(c_A)}{\pi_{NA} MU(c_{NA})}$$

- ▶ Wtedy:

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} > \frac{\pi_A}{1 - \pi_A} \Rightarrow MU(c_A) > MU(c_{NA})$$

- ▶ Dla konsumenta z awersją do ryzyka $c_A < c_{NA}$
(niepełne ubezpieczenie)

Dywersyfikacja

- ▶ Zmniejszanie ryzyka przez dywersyfikację
 - ▶ Np. 2 firmy, akcje kosztują 1000 PLN
 - ▶ Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ firma A wypłaci 100 PLN na akcję, firma B wypłaci 20 PLN na akcję
 - ▶ Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ firma A wypłaci 20 PLN na akcję, firma B wypłaci 100 PLN na akcję
 - ▶ Jak zainwestować 10000 PLN?
 - ▶ Kupić 10 akcji A?
 - ▶ 1000 PLN z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i 200 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$
 - ▶ Oczekiwany zysk $EX_A = 0,5 \cdot 1000 + 0,5 \cdot 200 = 600$
 - ▶ Kupić 10 akcji B?
 - ▶ Dywersyfikacja – kupić po 5 akcji każdej firmy (600 na pewno!)



Dywersyfikacja

- ▶ Dywersyfikacja utrzymała oczekiwany zysk, a zmniejszyła ryzyko
 - ▶ Np. portfele akcji
- ▶ Zwykle spadek ryzyka w zamian za niższy oczekiwany zysk
 - ▶ Np. portfele inwestycyjne (akcje i obligacje)



Ubezpieczenia wzajemne / dzielenie ryzyka

▶ Ubezpieczenia wzajemne – przykład:

- ▶ 100 konsumentów z awersją do ryzyka
- ▶ Każdy z prawdopodobieństwem 0,01 może ponieść stratę w wysokości 10000
- ▶ Każdy ma dochód w wysokości 40000
- ▶ Brak ubezpieczenia – oczekiwany dochód:

$$EX = 0,99 \cdot 40000 + 0,01 \cdot (40000 - 10000) = 39900$$

▶ Ubezpieczenia wzajemne:

- ▶ Oczekiwana strata wynosi $EX = 0,01 \cdot 10000 = 100$
- ▶ Każdy wpłaca 100 na fundusz ubezpieczenia, które pokrywa ewentualne straty
- ▶ Oczekiwany dochód: $EX = 40000 - 100 = 39900$
- ▶ Dzielenie ryzyka zwiększa EU , przy awersji do ryzyka



Jak zmierzyć swoją skłonność do ryzyka?

	A		B	
	A1 - wygrana 20	A2 - wygrana 16	B1 - wygrana 38,5	B2 - wygrana 0,1
	Prawd A1.	Prawd. A2	Prawd B1	Prawd B2
1	0,1	0,9	0	1
2	0,2	0,8	0,1	0,9
3	0,3	0,7	0,2	0,8
4	0,4	0,6	0,3	0,7
5	0,5	0,5	0,4	0,6
6	0,6	0,4	0,5	0,5
7	0,7	0,3	0,6	0,4
8	0,8	0,2	0,7	0,3
9	0,9	0,1	0,8	0,2
10	1	0,0	0,9	0,1

Praca samodzielna

- ▶ Literatura
 - ▶ Varain 15: Popyt rynkowy

