

Mikroekonomia A.12

Maciej Wilamowski

Wycena papierów wartościowych

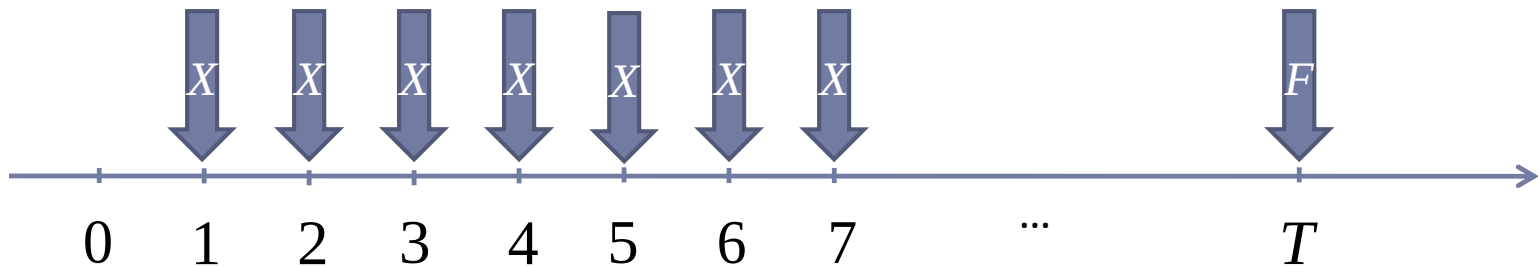
- ▶ Ile wart jest *papier wartościowy*, który obiecuje wypłacić
 - ▶ m_1 po 1 roku,
 - ▶ m_2 po 2 roku,
 - ▶ m_3 po 3 roku?
- ▶ Wartość obecna takich płatności to:
 - ▶ $m_1/(1+r)$
 - ▶ $(m_2/(1+r))/(1+r) = m_2/(1+r)^2$
 - ▶ $((m_3/(1+r))/(1+r))/(1+r) = m_3/(1+r)^3$
- ▶ Więc

$$PV = m_1/(1+r) + m_2/(1+r)^2 + m_3/(1+r)^3$$



Wycena obligacji

- ▶ Ile warta jest *obligacja*, która co roku, przez T lat wypłaca *kupony (odcinki)* w wysokości X , a w *terminie zapadalności* wypłaca swoją *wartość nominalną* F ?



$$PV = \frac{X}{1+r} + \frac{X}{(1+r)^2} + \dots + \frac{X}{(1+r)^{T-1}} + \frac{F}{(1+r)^T}.$$

Wycena obligacji

- ▶ Załóżmy, że wygrałeś w loterii, której główna wygrana wynosi '1 000 000 PLN', ale gwiazdka w regulaminie mówi, że kwota będzie wypłacona w 10 rocznych ratach po 100 000 PLN każda (z czego pierwsza dopiero za rok)
- ▶ Jaka jest prawdziwa (obecna) wartość takiej wygranej?
 - ▶ Załóżmy stopę procentową na poziomie $r = 10\%$
 - ▶
$$PV = \frac{100000}{1+0,1} + \frac{100000}{(1+0,1)^2} + \dots + \frac{100000}{(1+0,1)^{10}} = 614457$$

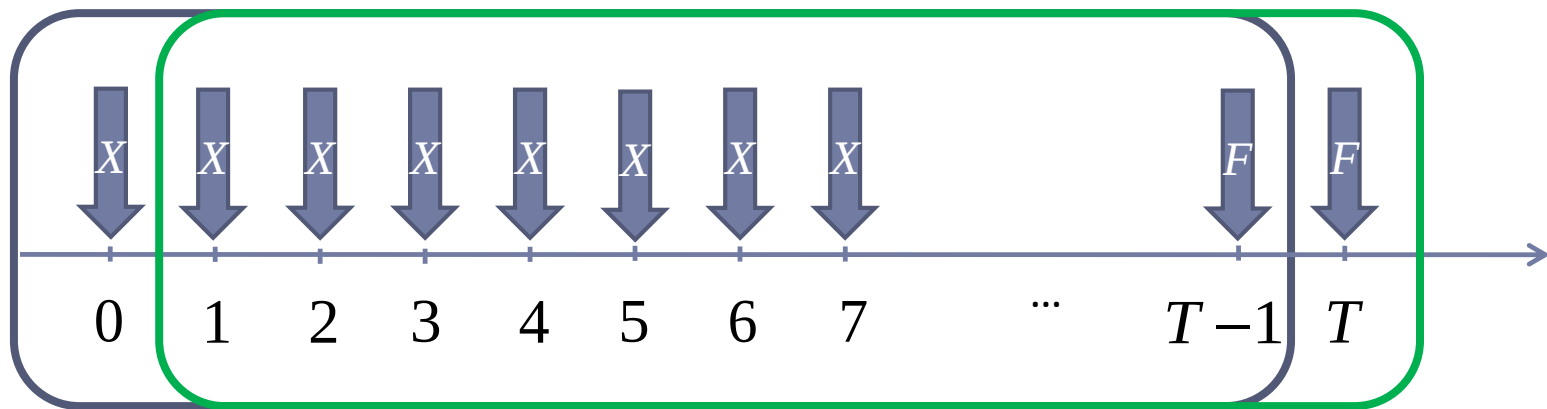
Szereg geometryczny

$$a_1 = \frac{X}{1+r} \quad a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{1+r} = a_1 \cdot q^{n-1} \quad PV = \sum_{n=1}^{n=k} a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}$$

$$a_1' = X \quad PV = \sum_{n=2}^{n=k+1} a_1' q^{n-1} = \sum_{n=1}^{n=k+1} a_1' q^{n-1} - \sum_{n=1}^{n=k+1} a_1' q^{n-1} = a_1' \frac{1-q^{k+1}}{1-q} - a_1'$$

Wycena obligacji

- ▶ Jeżeli mamy T elementów, to inne dyskontowanie gdy pierwszy element jest na początek a inne, gdy na koniec pierwszego okresu. Liczba elementów jest jednak taka sama.



Wycena konsol

- ▶ *Konsola* (płatność dożywotnia) – papier wartościowy, który wypłaca określony kupon X w nieskończoność
- ▶ Za ile można kupić konsolę? (Jaka jest jej wartość obecna?)

$$PV = \frac{X}{1+r} + \frac{X}{(1+r)^2} + \dots + \frac{X}{(1+r)^t} + \dots$$

- ▶ Szereg geometryczny

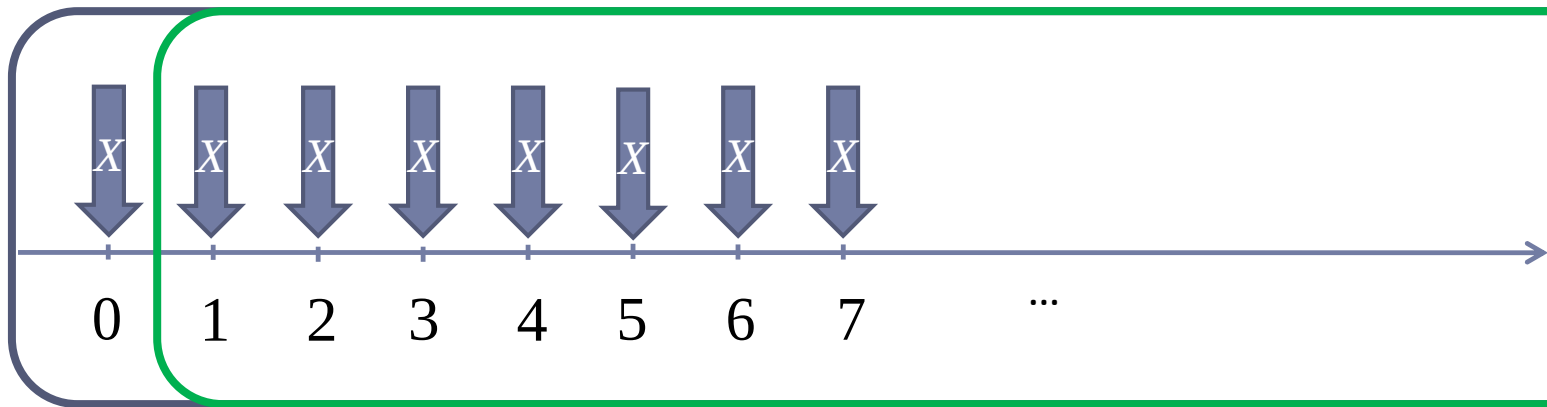
$$\text{▶ } a_1 = \frac{X}{1+r} \quad a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{1+r} = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\text{▶ } PV = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \quad \text{szereg zbieżny} \Leftrightarrow |q| < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\text{▶ } PV = \frac{X}{1+r} \bigg/ \left(1 - \frac{1}{1+r}\right) = \frac{X}{1+r} \bigg/ \frac{r}{1+r} = \frac{X}{r}$$

Wycena konsol

- ▶ Jeżeli mamy nieskończenie wiele elementów, to inna jest wartość bieżąca, gdy pierwszy element jest na początek a inne, gdy na koniec pierwszego okresu. Liczba elementów jest jednak taka sama - nieskończona



Wycena konsol

- ▶ Za ile można kupić konsolę? (Jaka jest jej wartość obecna?)

$$PV = \frac{X}{1+r} + \frac{X}{(1+r)^2} + \dots + \frac{X}{(1+r)^t} + \dots$$

- ▶ Szereg geometryczny

$$a_1 = \frac{X}{1+r} \quad a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{1+r} = a_1 \cdot q^{n-1} \quad |q| < 1$$

$$PV = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad PV = \frac{X}{1+r} \bigg/ \left(1 - \frac{1}{1+r}\right) = \frac{X}{1+r} \bigg/ \frac{r}{1+r} = \frac{X}{r}$$

- ▶ Ile warta jest konsola, gdy pierwsza wypłata następuje na początku pierwszego okresu?
 - ▶ Wystarczy dodać X.



Wycena konsol

- ▶ Inaczej:

$$PV = \frac{1}{1+r} \left(X + \frac{X}{1+r} + \frac{X}{(1+r)^2} + \dots \right) = \frac{1}{1+r} (X + PV)$$

$$PV = \frac{X}{r}$$

- ▶ Np. dla $r = 10\%$ konsola wypłacająca w nieskończoność 100 000 PLN rocznie warta jest 1 000 000 PLN



Częstsza kapitalizacja

- ▶ Stopy procentowe zwykle podawane w ujęciu rocznym
- ▶ Co jeśli kapitalizacja jest częstsza niż roczna?
 - ▶ Np. odsetki od oszczędności na koncie w banku naliczają się raz na miesiąc, a bank podaje roczną stopę oprocentowania konta

$$FV = X \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nT}$$

- ▶ n – liczba naliczeń odsetek w roku
 - ▶ T – liczba lat
- ▶ Np. w mBanku oprocentowanie konta eMax Plus wynosi 5%, a kapitalizacja jest miesięczna
- ▶ *Efektywne oprocentowanie* wynosi $\left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^{12} - 1 = 5,12\%$



Częstsza kapitalizacja

- ▶ Jeśli kapitalizacja dyskretna (miesięczna, dzienna, dowolna inna):

$$FV = X \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nT}$$

- ▶ Jeśli kapitalizacja ciągła (okres kapitalizacji nieskończenie mały):

$$FV = X \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nT} = X e^{rT}$$

- ▶ Czasami dobre przybliżenie bardzo częstej kapitalizacji dyskretniej
- ▶ Przydatne w przypadku, gdy faktycznie 'kapitalizacja ciągła' – np. deprecjacja maszyn, wzrost wartości z wiekiem itp.



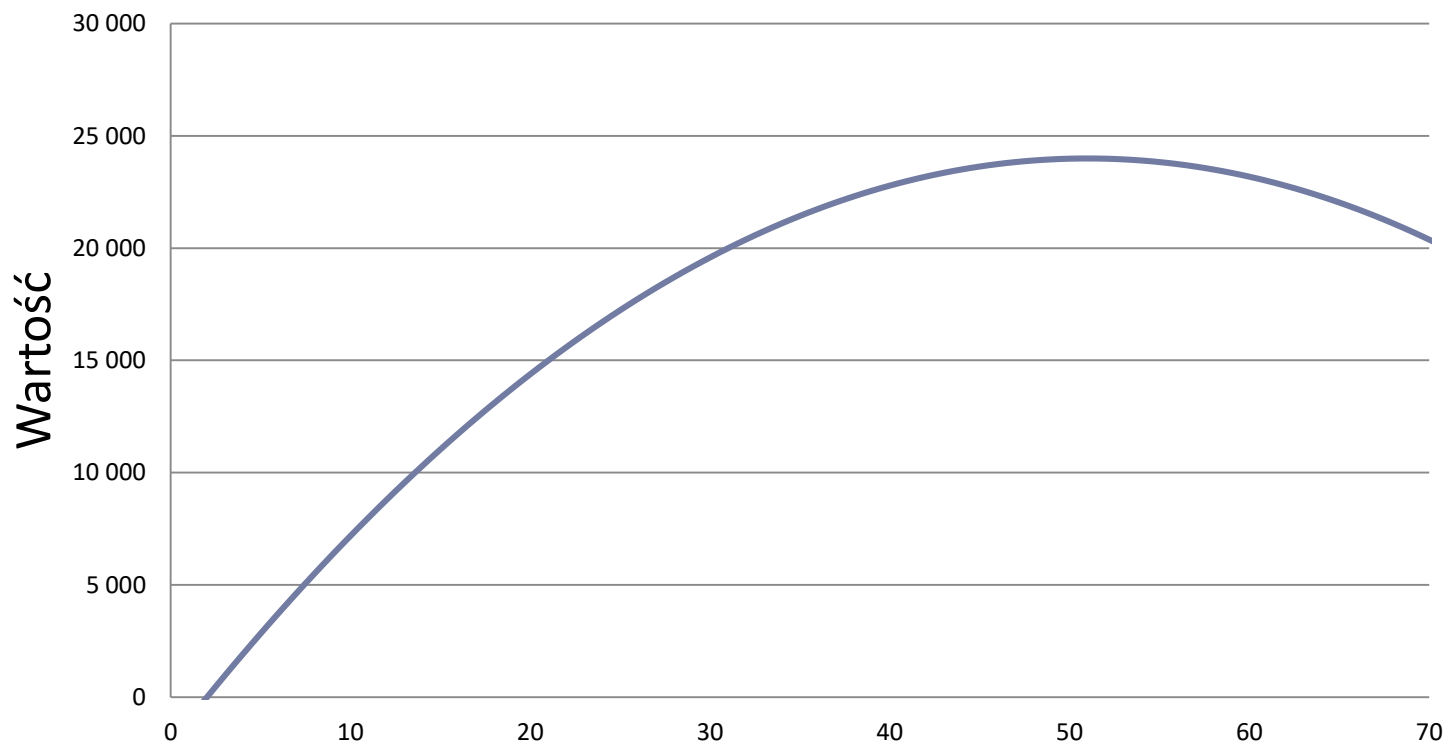
Wartość aktywa w czasie

- ▶ *Aktywa* – dobra, które dostarczają *strumienia* usług w jednostce czasu
 - ▶ Np. komputer, dom, obraz
 - ▶ Aktywa finansowe dostarczają strumienia pieniędzy w jednostce czasu – papiery wartościowe
 - ▶ Zwykle wartość aktywów związana z ryzykiem, ale to później – na razie zakładamy, że wszystko jest pewne na 100%
- ▶ Załóżmy, że posiadamy aktywo, którego wartość wzrasta
 - ▶ Kiedy należy je sprzedać?
 - ▶ Kiedy jego wartość jest maksymalna?



Wartość aktywa w czasie

- ▶ Załóżmy, że wartość aktywa zmienia się w sposób opisany taką funkcją: $V(t) = -1000 + 1000t - 10t^2$



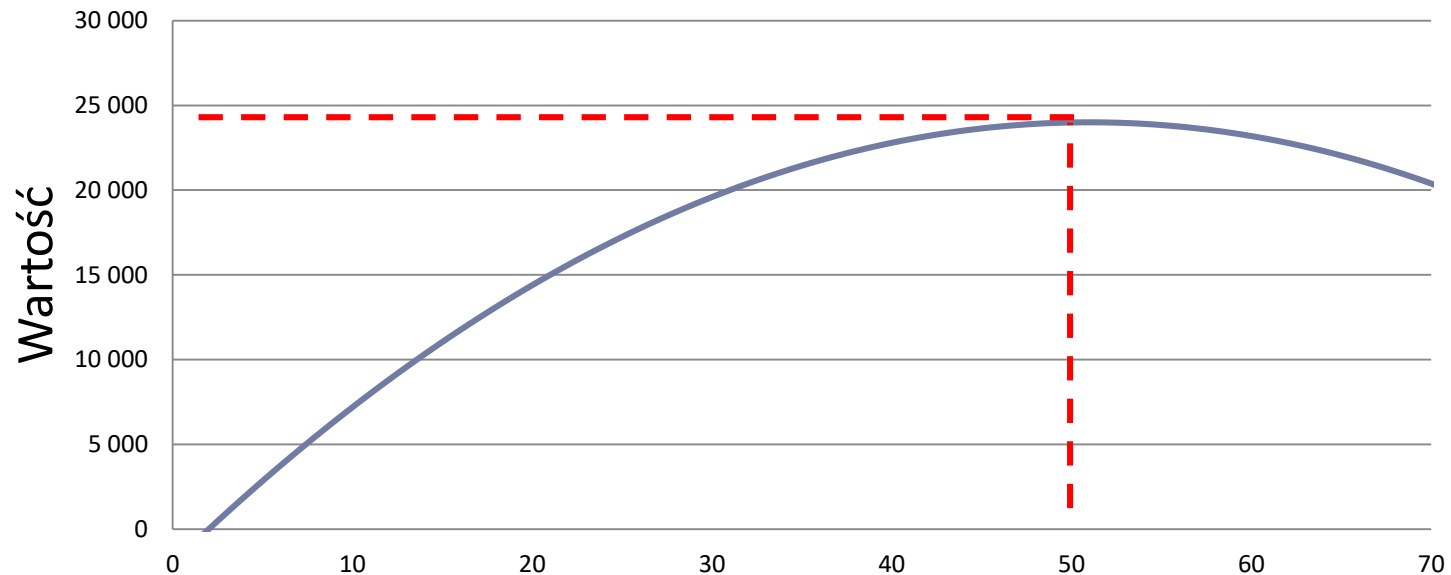
Wartość aktywa w czasie

- ▶ Szukamy maksimum wartości (FOC):

$$V(t) = -1000 + 1000t - 10t^2$$

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = 1000 - 20t = 0 \quad \Rightarrow t = 50$$

$$V(50) = 24000$$



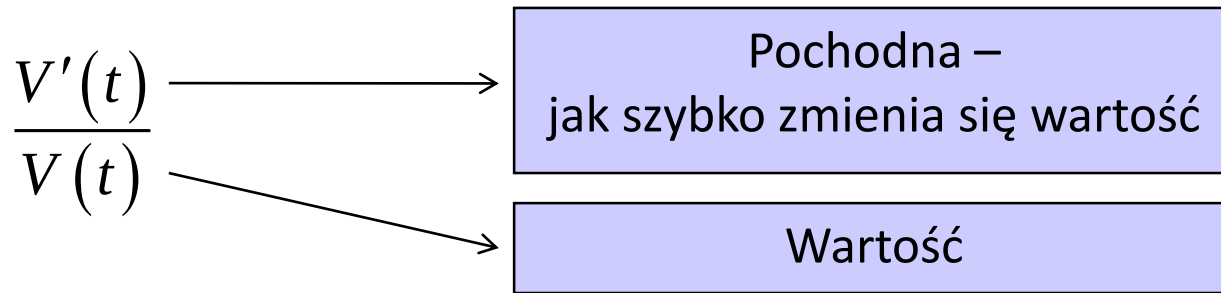
Stopa zwrotu

- ▶ *Stopa zwrotu* (roczna) jest przychodem jaki generuje dane aktyw w danym roku w stosunku do wartości tego aktywa
 - ▶ Np. jeśli aktyw, które można sprzedać za 1000 PLN przyniosło w danym roku 100 PLN, to stopa zwrotu wyniosła 10%
- ▶ Załóżmy, że stopa procentowa wynosi 10% – np. tyle można dostać w banku
 - ▶ Wtedy każde aktyw, które przynosiłoby mniej niż 10% należy sprzedać, ponieważ zamiast dostawać stopę zwrotu z danego aktywa lepiej ulokować pieniądze na lokacie i dostać stopę procentową 10%



Stopa zwrotu

- ▶ Stopa zwrotu z aktywa, którego wartość w czasie opisana jest przez funkcję $V(t)$ jest równa:



- ▶ U nas:

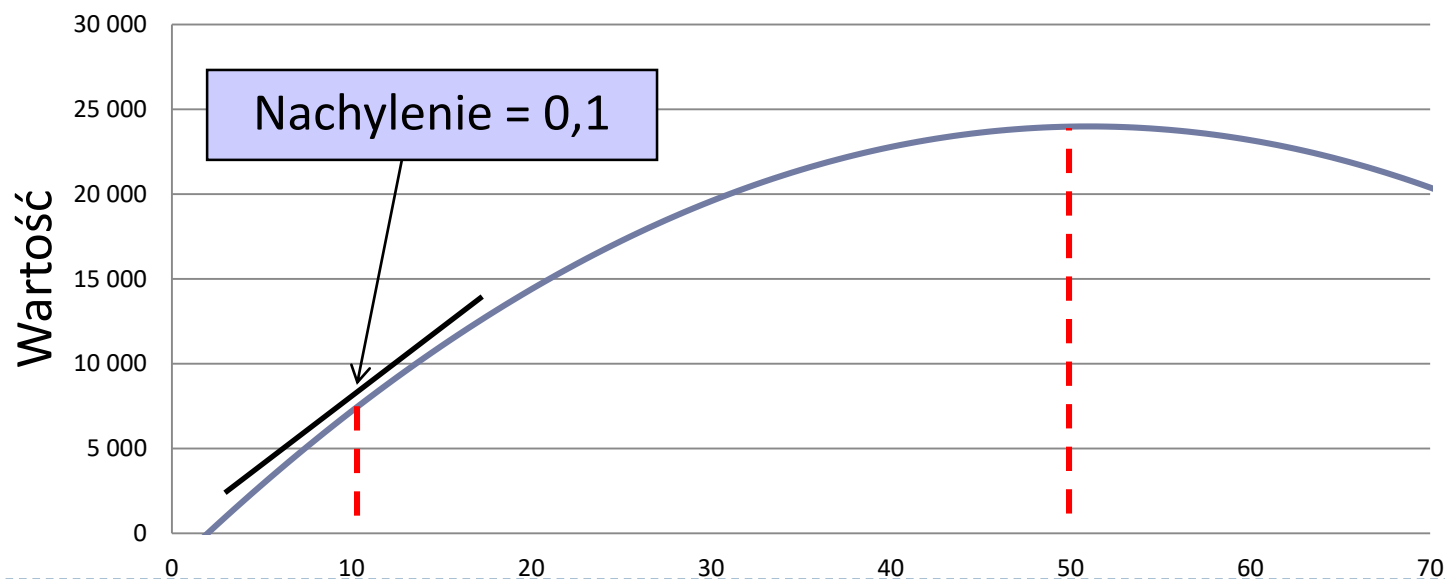
$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{1000 - 20t}{-1000 + 1000t - 10t^2}$$

- ▶ Kiedy sprzedać aktywo?
 - ▶ Wtedy kiedy stopa zwrotu z niego spadnie poniżej stopy procentowej (zwrotu z alternatywnej inwestycji)

Wartość aktywa w czasie

- ▶ Np. jeśli zamiast trzymać aktywo można zawsze dostać 10% na lokacie w banku (stopa procentowa 10%) to aktywo należy sprzedać gdy

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{1000 - 20t}{-1000 + 1000t - 10t^2} = 0,1 \quad \Rightarrow t = 10$$



Wartość aktywa w czasie

- ▶ Po 10 latach wartość aktywa będzie równa tylko 8000, a nie maksymalne 24000 po 50 latach, ale:
 - ▶ Czekać 50 lat z aktywem: dostajemy 24000
 - ▶ Sprzedając po 10 latach i wpłacając na lokatę: dostajemy $8000(1+0,1)^{40} = 362074$
 - ▶ Wpłacając od razu 1000 na lokatę: dostajemy $1000(1+0,1)^{50} = 117390$
- ▶ Aktywo należy sprzedać kiedy stopa zwrotu z niego spadnie poniżej stopy zwrotu z innego aktywa (np. stopy procentowej)



Arbitraż

- ▶ *Arbitraż* – kupowanie / sprzedawanie aktywów, wykorzystywanie różnic cen pomiędzy nimi w celu realizacji zysku
 - ▶ Także różnic cen obecnych i przyszłych
 - ▶ Prowadzi do wyrównania cen na wszystkich rynkach (brak możliwości arbitrażu, czyli osiągnięcia dodatkowego zysku bez ryzyka)
 - ▶ Wtedy dla rynków aktywów – cena każdego aktywa taka, że $r = R$
 - ▶ Np. jeśli dane aktywo przynosi stopę zwrotu $R > r$ to każdy chciałby je mieć, wtedy jego cena rośnie, a na skutek tego R maleje



Arbitraż

- ▶ Przykład – obligacje skarbowe, dające stałe roczne kupony w wysokości X (niezależne od stopy procentowej)
 - ▶ Początkowo na rynku równowaga, czyli $R = r$
 - ▶ Jeśli stopy procentowe rosną, to $R < r'$ – aktywa opłaca się pozbyć
 - ▶ Sprzedający – cena aktywa spada, a X bez zmian, więc w rezultacie $R' = r'$



Przykładowe zadania

- ▶ Kupiłeś obraz za 18 000 zł. Jego wartość rynkowa będzie rosnać o 500 zł rocznie przez następne 30 lat. To, że obraz ten wisi u Ciebie na ścianie warte jest dla ciebie 400 zł rocznie. Stopa procentowa wynosi 5%. Po ilu latach sprzedasz obraz?
- ▶ Dwa możliwe roczne strumienie:
 - ▶ I: 500 zł + 400 zł
 - ▶ II: $(18000 + T \cdot 500) r$



Przykładowe zadania

- ▶ Jeżeli $F(T)$ to np. wartość lasu, która rośnie z upływem czasu, to kiedy najbardziej opłaca się ścinać las?

$$PV = \frac{F(T)}{(1+r)^T} \quad PV = \frac{F(T)}{e^{rT}} = e^{-rT} F(T)$$

$$PV' = 0 \quad PV' = e^{-rT} F'(T) + (-r)e^{-rT} F(T) = 0$$

$$F'(T) - rF(T) = 0$$

$$r = \frac{F'(T)}{F(T)}$$



Praca samodzielna

- ▶ Literatura

- ▶ Varain: Rozdział 12 – Niepewność.

